
Tartalom

Bevezetés	2
Publikációk	5
Tudományos címek	9
Nemzetközi konferenciák és tanulmányutak	10
Megrendezett szakmai események	13
Egyéb tanulmányok és kutatástámogatás	16
Tudományos eredmények	18

Bevezetés

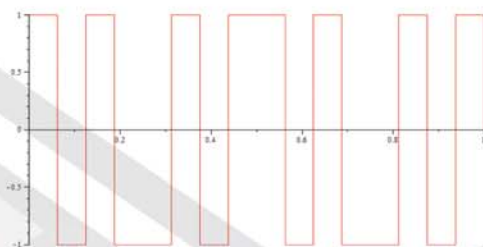
Jelen kiadvány azokat az eredményeket foglalja össze, melyeket a Nyíregyházi Főiskola Matematika és Informatika Intézete ért el a Társadalmi Megújulás Operatív Program keretében végzett szakmai tevékenysége során. A projekt 2012. októberében kezdődött és 2014. szeptemberében ér véget, öt éves fenntartási időszakkal, címe: **„Nemzetközi kutatások diadikus analízisben és kapcsolódó témákban, megoldások a digitális világban”**, kódszáma: **TÁMOP 4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0051**.

A kutatás célja a diadikus analízis elméletének továbbfejlesztése és útnyitás más területek felé. A kutatómunka nemzetközi kutatók és kutatócsoportok közreműködésével, fiatal kutatók és hallgatók bevonásával történt a vállalati szektorral együttműködve. Komplex alapkutatások kerültek megvalósításra a diadikus analízis, logisztika és digitális jelfeldolgozás területeken, összekapcsolva a területek nemzetközi szinten elismert kutatóit, a mögöttük álló intézményeket a hazai kutatási projektekkel. A kifejlesztett módszereket - többek között - olyan tudományterületen alkalmaztuk és terjesztettük ki, mint a digitális jelfeldol-

gozás és az operációkutatás.

Mi is az a diadikus analízis, amely kutatására a Nyíregyházi Főiskola mintegy 450 millió forint támogatást nyert az Európai Uniótól? Erről olyan formában ejtenénk néhány gondolatot, hogy azoknak az olvasóknak is adjon egy benyomást a diadikus analízisről, akiknek nem szakmájuk a matematika. A világban nagyon sok olyan jelenség, kapcsolati forma van, amelyeknek a jellemzése, leírása esetleges előrejelzése nagy jelentőséggel bír, de lévén, hogy ez a kapcsolati forma - nevezzük függvénynek - nagyon bonyolult így nem lehetséges pontosan leírni. Ilyenkor nem a „költészes” vagy „csúnya” függvényeket, kapcsolatokat írjuk le, mert ez esetenként nem is lehetséges, hanem megadunk néhány nagyon „szép és elegáns”, „jól számolható” függvényt és ezek segítségével közelítőleg írjuk le a számunkra fontos függvényeket. A diadikus analízis esetében ezek a „szép és elegáns” függvények az úgynevezett Walsh-függvények, amelyek csak a +1 és a -1 értékeket vesznek fel. Továbbá, nagyon gyorsan meg lehet határozni, hogy melyik Walsh-függvény milyen helyeken veszi fel a +1 értéket, illetve a -1 értéket.





ω_{10} Walsh-Paley-függvény

A Nyíregyházi Főiskola Matematika és Informatika Intézetében működő diadikus harmonikus analízis kutatócsoport már több mint két évtizede dolgozik együtt. A projekt keretében azt a több éves tudományos kutatómunkát folytattuk, amelyet a Diadikus Analízis elméletében eddig végeztünk. A kutatócsoport számos olyan nemzetközileg ismert és elismert eredményt ért el, amelyek vezető matematikai lapokban jelentek meg. Olyanokban mint például a *Journal of Approximation Theory*, *Proceedings of the American Mathematical Society* vagy a *Journal of Mathematical Analysis and Application*.

A projekt nagy lendületet adott a szakterületen végzett kutatásokban. Sikeresült három kutatócsoportot felállítani, egy, ami folytatta a diadikus harmonikus analízis kutatócsoport által végzett elméleti matematikai kutatást és további kettő, melyek a digitális jelfel-

dolgozásban és a logisztikában alkalmazták a diadikus analízis módszereit. Két év alatt közel 60 tudományos kézirat született, melyekből 29 már meg is jelent nemzetközileg elismert, referált tudományos folyóiratokban és további 10 megjelenés alatt van.

A projekt résztvevői számos nemzetközi konferencián és tanulmányúton vettek részt, továbbá 2 nemzetközi tudományos konferenciát és 2 nemzetközi tudományos workshopot rendeztünk, ahol 7 országból a szakterület legkiemelkedőbb szakemberei vettek részt. 21 szakszemináriumot rendeztünk, ahol elismert szakemberek adtak elő és az aktuális szakmai kérdéseket vitattuk meg. A sikeres kutatómunka eredményeként 4 projekttag tudományos címet szerzett. Ezek között szerepel MTA doktori, habilitációs és PhD doktori cím. Mind a 4 esetben az illetékes tanács vagy bizottság a tudományos címet odaítélte.



Bevezetés

A projekt megvalósításának két éve alatt igen figyelemre méltó nemzetközi kapcsolati rendszert sikerült kialakítani a kutatóknak és a projektmenedzsmentnek, a külföldi szakmai és projektegyeztetések, tárgyalások során számos továbbfejlesztési, együttműködési szándék fogalmazódott meg román, angol, német, amerikai, grúz, szerb és orosz partnerek részvételével. Nem titkolt célunk - ami egybeesik a projekt egyik fő célkitűzésével - hogy a projekt során született eredményeket további kutatás-fejlesztés so-

rán hasznosítsuk, nemzetközi (H2020) és hazai (GINOP) pályázati felhívásokra európai és magyarországi partnereinkkel közösen adjuk be projektötletünket. Ahogy a kiadvány további részében is látni fogja a kedves Olvasó; rengeteg értékes és izgalmas tudományos eredmény született, melyek hatékonyan használhatóak az orvos-, mérnök-, informatika- és gazdaságtudományban eddig nem, vagy épp nem megfelelő hatékonysággal megoldott problémák újszerű kezelésére.



Publikációk

Megjelent publikációk

- [1] **Dobos Imre, Gelei Andrea**, *Keresletelőrejelzés sporadikus keresletű termékekre: Egy gyógyszer-nagykereskedelmi vállalat esettanulmánya*, Szigma XLIII., **3.-4. szám** (2012), 125–143
- [2] **Dobos Imre, Miklós Pintér**, *Cooperation in an HMMS-type supply chain: A management application of cooperative game theory*, Periodica Polytechnica: Social and Management Sciences, **21/1** (2013) 45–52
- [3] **Vörösmarty Gyöngyi, Dodos Imre**, *Analysis of purchasing activity with discounted cash flow inventory models*, Periodica Polytechnica: Social and Management Sciences, **21/2** (2013) 67–70
- [4] **Gát György**, *Almost everywhere convergence of sequence of two-dimensional Vilenkin-Fejér means of integrable functions*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., **39** (2013), 79–94
- [5] **Gát György**, *On the Fejér kernel functions with respect to the character system of the group of 2-adic integers*, Annales Univ. Sci. Budapest, **40** (2013), 257–267
- [6] **Nagy Károly**, *Almost everywhere convergence of cone-like restricted two-dimensional Fejér means with respect to Vilenkin-like systems*, Algebra i Analiz, **25(4)** (2013), 125–138
- [7] **Simon Ilona**, *On transformation by dyadic martingale structure preserving functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., **39** (2013), 381–390
- [8] **Szolnoki Attila, Matjaž Perc**, *Effectiveness of conditional punishment for the evolution of public cooperation*, Journal of Theoretical Biology, **325** (2013), 34–41.
- [9] **Zhen Wang, Solnoki Attila, Matjaž Perc**, *Optimal interdependence between networks for the evolution of cooperation*, Sci. Rep. **3** (2013) 2470



- 10] **Blahota István, George Tephnadze**, *Strong convergence theorem for Vilenkin-Fejér means*, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **85/1-2** (2014), 181–196
- 11] **Blahota István, George Tephnadze**, *On the (C, α) -means with respect to the Walsh system*, *Analisis Mathematica*
- 12] **Bóna Krisztián, Lénárt Balázs**, *Supporting demand planning process with Walsh-Fourier based techniques*, *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, **42(2)** (2014), 97–102
- 13] **Duleba Szabolcs**, *Az Interpretive Structural Modeling (ISM) módszerének, és egy lehetséges alkalmazásának bemutatása*, *Vezetéstudomány*, **XIV. ÉVF. 1. SZÁM** (2014), 31–40
- 14] **Fridli Sándor**, *On integrability and strong summability of Walsh-Kaczmarz series*, *Analysis Mathematica*, **40** (2014), 197–214
- 15] **Gát György**, *Almost everywhere convergence of sequences of Cesàro and Riesz means of integrable functions with respect to the multidimensional Walsh system*, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **30(2)** (2014), 311–322
- 16] **Gát György, Toledo Rodolfo**, *Convergence in L_p -norm of Fourier series on the complete product of quaternion groups with bounded orders*, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **30(9)** (2014), pp 1566-1578
- 17] **Gát György, Toledo, Rodolfo**, *A numerical method for solving linear differential equations via Walsh functions*, *Advances in Information Science and Application*, **Volume II** (2014), pp 334 – 339, *Proceedings of the 18th International Conference on Computers (part of CSCC 2014)*, Santorini Island, Greece, July 17-21, 2014
- 18] **Gát György, Ushangi Goginava**, *Convergence of logarithmic means of Multiple Walsh-Fourier series*, *Stud. Sci.Math. Hungar.*, *Stud. Sci.Math. Hungar.*, **51(1)** (2014), 50–66
- 19] **Gát György, Ushangi Goginava**, *Triangular Fejér Summability of Two-Dimensional Walsh-Fourier series*, *Analysis Mathematica*, **40** (2014), 83–104
- 20] **Nagy Károly**, *On the restricted summability of Walsh-Kaczmarz-Fejér means*, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **85/1-2** (2014), 113–122



- 21] **Nagy Károly, George Tephnadze**, *Walsh-Marcinkiewicz means and Hardy spaces*, *Central European Journal of Mathematics*, Central European Journal of Mathematics, **12(8)** (2014), 1214–122
- 22] **Nagy Károly, George Tephnadze**, *Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space $H_{2/3}$* , *Kyoto Journal of Mathematics*, **54(3)** (2014), 641–652
- 23] **Nagy Zsolt**, *Adaptive design process for responsive web development*, *Advances in Information Science and Application*, **Volume II** (2014), pp 334 – 339, Proceedings of the 18th International Conference on Computers (part of CSCC 2014), Santorini Island, Greece, July 17-21, 2014
- 24] **Zhen Wang, Szolnoki Attila, Matjaž Perc**, *Rewarding evolutionary fitness with links between populations promotes cooperation*, *J. Theor. Biol.* **349** (2014), 50–56
- 25] **Zhen Wang, Szolnoki Attila, Matjaž Perc**, *Self-organization towards optimally interdependent networks by means of coevolution*, *New J. Phys.* **16** (2014), 033041
- 26] **Szolnoki Attila, Matjaž Perc, Mauro Mobilia**, *Facilitators on networks reveal optimal interplay between information exchange and reciprocity*, *Phys. Rev. E*, **89** (2014), 042802
- 27] **Szolnoki Attila, Jeromos Vukov, Matjaž Perc**, *From pairwise to group interactions in games of cyclic dominance*, *Phys. Rev. E*, **89** (2014), 062125
- 28] **Szolnoki Attila, Matjaž Perc**, *Defection and extortion as unexpected catalysts of unconditional cooperation in structured populations*, *Sci. Rep.*, **4** (2014), 5496
- 29] **Xiaojie Chen, Szolnoki Attila, Matjaž Perc**, *Probabilistic sharing solves the problem of costly punishment*, *New J. Phys.*, **16** (2014), 083016



Megjelenés alatt lévő publikációk

- [1] **Blahota István, George Tephnadze, Rodolfo Toledo**, *Strong convergence theorem of Cesàro means with respect to the Walsh system*, Tohoku Mathematical Journal (Japán)
- [2] **Dobos Imre, Duleba Szabolcs**, *Dynamic forecasting with dyadic harmonic analysis in supply chains: a review*, Proceedings of the 18th International Symposium on Logistics (ISL 2013), Vienna, Austria 7-10th July, 2013
- [3] **Dobos Imre, Gelei Andrea**, *Biztonsági készletek megállapítása előrejelzés alapján: Sporadikus termék esettanulmánya egy gyógyszer-kereskedelmi vállalat gyakorlatából*, Vezetéstudomány
- [4] **Gát György, Simon Ilona**, *(C, α) summability of two-dimensional integrable functions on the 2-adic additive group*, Acta Math. Hungar.
- [5] **Gát György, Toledo Rodolfo**, *Calculus on Walsh and Vilenkin groups*, in: Ferenc Schipp, Radomir Stankovic, Sándor Fridli (Eds), *Dyadic methods in Signal and System Analysis*, series: Applied Sciences and Engineering, Springer
- [6] **Gát György, Ushangi Goginava**, *Almost Everywhere Strong Summability of Double Walsh-Fourier Series*, Contemp. Math.
- [7] **Gát György, Ushangi Goginava, Grigor A. Karagulyan**, *On everywhere divergence of the strong Φ -means of Walsh-Fourier series*, J. Math. Anal. Appl.
- [8] **Nagy Károly**, *On the restricted summability of Walsh-Kaczmarz-Fejér means*, Georgian Mathematical Journal
- [9] **Ushangi Goginava, Nagy Károly**, *The two-dimensional Fejér means on diagonal Hardy space*, Periodica Mathematica Hungarica
- [10] **Schipp Ferenc, Fridli Sándor**, *Dyadic derivative, summation, approximation*, in: Ferenc Schipp, Radomir Stankovic, Sándor Fridli (Eds), *Dyadic methods in Signal and System Analysis*, series: Applied Sciences and Engineering, Springer



Tudományos címek

MTA doktora cím megszerzése

Dr. Dobos Imre, a Logisztika Kutatócsoport tagja, 2013. november 28-án sikeresen megvédte az MTA doktora címre benyújtott értekezését az MTA Székház Kupolatermében. Az értekezés címe: Vállalati termelési-készletezési stratégiák környezetvédelem figyelembevételével: Optimális irányítási megközelítés.

Habilitációs cím megszerzése

Dr. Duleba Szabolcs, a Logisztika Kutatócsoport tagja, 2013. április 15-én sikeresen tartotta meg habilitációs és tudományos előadását a Debreceni Egyetem Agrár- és Gazdálkodástudományok Centrumán. A habilitációs értékezés címe: Az Analytic Hierarchy Process alkalmazási lehetőségei a logisztikában.

Dr. Dobos Imre, a Logisztika Kutatócsoport tagja, 2013. április 23-án sikeresen tartotta meg habilitációs és tudományos előadását a Budapesti CORVINUS Egyetem Társadalomtudományi Karán. A habilitációs értékezés címe: Supplier-Buyer Relationship and Supply Chain Coordination.

Dr. Blahota István, a Diadikus Analízis Kutatócsoport tagja, 2013. október 16-án sikeresen tartotta meg habilitációs és tudományos előadását a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kárán. A habilitációs értékezés címe: Diadikus ortonormált rendszerek Fourier-sorainak vizsgálata.

PhD doktori cím megszerzése

Simon Ilona, a Diadikus Analízis Kutatócsoport tagja, 2013. november 22-én sikeresen megvédte a PhD doktori címre benyújtott értekezését a Debreceni Egyetemen matematika- és számítástudományokban. Az értekezés címe: Orthogonal systems on local fields.



Nemzetközi konferenciák és tanulmányutak

A projekt tagjai a következő nemzetközi szakmai konferenciákon tartották előadást és tanulmányutakon vettek részt.

Nemzetközi konferenciák

- Constructive Theory of Functions-2013, Sozopol, Bulgária, 2013. június 09-15
- XXX. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonőszöd, Magyarország, 2013. június 10-13
- IV Jaen Conference on Approximation Theory, Úbeda, Spanyolország, 2013. június 23-27
- 26th European Conference on Operational Research (EURO-INFORMS), Róma, Olaszország, 2013. július 1-4
- 18th International Symposium on Logistics (ISL), Bécs, Ausztria, 2013. július 7-10
- 4th Workshop on Fourier Analysis and related fields, Budapest, Magyarország, 2013. augusztus 26-30
- International Conference on Fourier Analysis and Approximation Theory, Bazaleti, Grúzia, 2013. október 23-28
- International Conference on Logistics and Transportation (ICLT), Kyoto, Japán, 2013. november 5-8
- Western Spring Sectional Meeting University of New Mexico, Albuquerque, USA, 2014. április 4-6



- 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS), Barcelona, Spanyolország, 2014 július 13-18
- 18th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC 2014), Szantorini, Görögország, 2014. július 17-21

Tanulmányutak

- Iv. Javakhishvili Tbiliszi Állami Egyetem Matematika Tanszéke, Grúzia, 2013. május 24.- június 01.

Prof. Ushangi Goginava, akivel több éves sikeres szakmai együttműködést tartunk fenn, hívta meg Dr. Blahota István, Dr. Nagy Károly és Dr. Toledo Rodolfo projekttagokat. Több szakmai konzultációban vettek részt az Egyetem Matematika Tanszékén, közös kéziratokon dolgozták, melyek azóta nemzetközi lapokban meg is jelentek. Mindhárom résztvevő előadást tartott a Tanszék szakszemináriumán, ahol a tanszék oktatói vettek részt.

- Rutgers Egyetem Supply Chain Management Tanszéke, USA, 2013. szeptember 23.- október 03.

Dr. Duleba Szabolcs projekttag meghívást kapott a New Jersey-ben található Rutgers Egyetemre a Walsh-Fourier analízis kereslet idősorok előrejelzésének témájában. A meghívó professzor Dr. Yao Zhao, aki számos operációkutató témában írt rangos nemzetközi publikációval rendelkezik. A meghívás egy úgynevezett „Brown Bag” szeminárium tartására vonatkozott, amelyen PhD hallgatók és a Supply Chain Management tanszék professzorai vesznek részt és interaktív módon beszélnek meg az előadóval kutatása lehetséges folytatását.

- New Mexico Egyetem Matematika és Statisztika Tanszéke, Albuquerque és La Biola Egyetem Matematika és Informatika Tanszék, Kalifornia, USA, 2014. április 1 – 22.

Dr. Gát György, Dr. Toledo Rodolfo projekttagok elfogadták Prof. Maria Cristina Pereyra meghívását és részt vettek a New Mexico Egyetemen



Nemzetközi konferenciák és tanulmányutak

Cora Sadosky tiszteletére megrendezett „13th New Mexico Analysis Seminar” című szemináriumon és egy az Amerikai Matematikai Társulat által szervezett konferencián, ahol előadást tartották. Ezután szakmai útjukat a La Biola Egyetemen folytatták Prof. William Wade meghívásának köszönhetően. A tanulmányúton lehetőségük adódott szakmai megbeszéléseket folytatni a a kutatóterületük olyan neves matematikusaival, mint Kees Onneweer, James Daly és Alex Stokolos.

- Sheffield-i Egyetem, London és Dortmund-i Egyetem, 2014 február 12-16.
Dr. Duleba Szabolcs projekttag a Sheffield-i Egyetem docensével, Dr. Alok Choudhary-val találkozott, aki az operációs menedzsment és ellátásilánc menedzsment területén nemzetközi szaktekintélynek számít. A Horizon 2020 keretprogramot megelőző uniós K+F keretprogram, azaz az FP7 több nyertes projektjének is vezetője volt, elsősorban logisztikai és matematikai-közgazdasági területen. Dortmundban a Dortmund-i Egyetem junior professzorával, Dr. Grigory Pishchulov-val megbeszélést folytatott, aki a termelésmenedzsment, logisztikai optimalizáció nemzetközileg is elismert kutatója. A docens úrral elsősorban olyan lehetséges ipari alkalmazásokat vitatták meg, amelyek a rendelkezésre álló matematikai arzenállal javíthatóak lennének, és ezáltal alkalmasak lehetnek Horizon 2020-as felhívások pályázatainak.



Megrendezett szakmai események

Szakszemináriumok

A projekt ideje alatt 21 szakszemináriumot rendeztünk, ahol elismert szakemberek adtak elő és az aktuális szakmai kérdéseket vitattuk meg. Többek között a következő előadókat hívtuk meg:

- Kovács Péter (ELTE)
- Daróczy Bálint (MTA - SZTAKI)
- Révész Szilárd (MTA Rényi Alfréd Kutatóintézet)
- Lengyel Zsolt (PET Intézet)
- Michael Gastner (Természettudományi Kutatóközpont, Budapest)
- Kovács Zoltán (Pannon Egyetem)
- Matolcsi Máté (MTA Rényi Alfréd Kutatóintézet)
- Illés Tibor (BME)
- Grigori Karagulyan (Örményországi Tudományos Akadémia, Matematika Intézet)
- Bokor Zoltán (BME)
- Rontó Miklós (Miskolci Egyetem)
- Vastag Gyula (Pannon Egyetem)
- Ushangi Goginava (Tbilisi Állami Egyetem)
- George Tephnadze (Tbilisi Állami Egyetem)
- Schipp Ferenc (ELTE)
- Vörös József (Pécsi Egyetem)
- Weisz Ferenc (ELTE)
- Simon Péter (ELTE)
- Chikán Attila (Budapesti Corvinus Egyetem)
- Móricz Ferenc (Szeged Tudományegyetem)
- Bohács Gábor (BME)



Nemzetközi tudományos konferenciák és workshopok

2013. október 1-től 2 napos nemzetközi tudományos konferenciát rendeztünk „Diadikus Analízis és alkalmazásai” címmel. A konferencia fő témája a lokálisan konstans ortonormált rendszereken alapuló approximációs kérdések vizsgálata és az eredmények alkalmazása a digitális jelfeldolgozás illetve az operációkutatás különféle területein. A rendezvény előadói között meghívott külföldi vendégek és a Nyíregyházi Főiskola Matematika és Informatika Intézete kutatócsoportjainak munkatársai tartottak előadást.

2013. október 4-én nemzetközi tudományos workshopot rendeztünk „A Walsh rendszer elmélete és kapcsolódó területek” címmel. A workshopon kiemelt szerep jutott annak, hogy a felmerülő különféle alkalmazásokból adódó kérdések megoldásában érdekelt kutatók megismerjék azokat a lehetőségeket, melyet a Walsh és Walsh-szerű rendszerek elmélete nyújthat.

2013. november 12.-től 2 napos nemzetközi tudományos workshopot rendeztünk „Idősor-elemzés és optimalizációs problémák megoldásai hagyományos és újszerű megközelítésben” címmel. Célja a hagyományos statisztikai idősor-elemzési módszerek

(ARIMA, SARIMA, Holt-Winters exponenciális simítás) bemutatása, előnyei, hátrányai, alkalmazhatóságuk feltételeinek azonosítása. Ezen felül, a projekt keretein belül kidolgozott és kidolgozás alatt lévő Walsh-Fourier megközelítésű idősor-analízis eljárás bemutatása és megvitatása, valamint a mainstream idősor-elemzési módszerekkel való összehasonlítása valós adatsorokon.

2014 június 1 és 6 között a Nyíregyházi Főiskola adott otthont a „Conference on Dyadic Analysis and Related Fields with Applications” nemzetközi konferenciának. A konferencia a diadikus analízis és kapcsolódó tudományterületeinek ez évi legjelentősebb konferencia eseménye volt a világon. A rendezvényt szervezői három, a terület legjelesebb professzora születésnapjának dedikálták. Schipp Ferenc (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest) 75-dik, William Wade (La Biola University, Los Angeles) 70-dik és Simon Péter (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest) 65-dik születésnapját ünnepelte a kutatási terület nemzetközi közössége.

A 7 országból jött negyven résztvevő előadásai a konferencia minden nap-



Megrendezett szakmai események

ján reggeltől kora estig tartottak, igen élénk - angol nyelven folytatott - szakmai viták, megbeszélések közepette. Magyarország részéről a rendezvényen - többek között - három akadémikus (MTA rendes tagja) vett részt a nevezett kutatókat, a diadikus analízis meghatározó személyiségeit ünnepeelve. A Nyíregyházi Főiskola ezekre a napokra, erre a hétre egy olyan erős szellemi centrummá változott, ahol kelet és nyugat találkozott Magyarország vezető kutatóival.

A konferencia néhány jellemző számadata: A konferencia napjain 4 egyórás és 23 félórás előadást tartott a konferencia mintegy 50 résztvevője. A résztvevők a következő országokból érkeztek: Amerikai Egyesült Államok, Bosznia és Hercegovina, Grú-

zia, Magyarország, Oroszország, Örményország, Szerbia. Az egyes előadásokon nemcsak a tudományterület, a diadikus analízis legfrissebb eredményeit osztották meg egymással a résztvevők, hanem különféle kapcsolódó, alkalmazott területekhez illeszkedő előadásokat is láthattak az érdeklődők. Többek között ilyen volt Járai Antal az ELTE egyetemi tanára által tartott a kvantumszámítógépekről, azaz a számítógépek jövőjéről tartott előadása is. Vagy Yuri Farkov a Russian State Geological Prospecting University (Moszkva) egyetem egyetemi tanára által tartott s többek között a diadikus analízis és a digitális jelfeldolgozás úgynevezett Walsh-wavelet transzformációkon keresztül történő kapcsolódásáról szóló előadása is.



Egyéb tanulmányok és kutatástámogatás

A projektben közreműködő partner vállalattól (egy hazánkban működő multinacionális FMCG vállalat) kapott **havi bontású keresleti idősorok kerültek elemzésre** a széles körben alkalmazott (mainstream) statisztikai eljárások alkalmazásával. Mivel a projekt logisztika területére eső célja az volt, hogy a Walsh-Fourier megközelítést készlet- illetve kereslet előrejelzésre alkalmazzuk, kiemelt fontosságú volt, hogy a már ismert statisztikai eljárások elvégzésre kerüljenek a rendelkezésre álló adatsorokon. A diadikus algoritmusok hatékonyságát ugyanis össze kellett vetünk az ARIMA, SARIMA, Box-Jenkins, illetve a Holt-Winters exponenciális illesztés előrejelzési hatékonyságával. A szolgáltatást elvégző cég egyrészt elvégezte ezeket az összetett statisztikai eljárásokat a kapott bőséges adatbázison, másrészt hasznos alap-statisztikákat is számolt (mozgó-átlag, szórás, stb.), harmadrészt pedig a logisztikai szempontból kiemelkedően fontos ABC-analízist is elvégezte, amely a vállalat által forgalmazott termékek előrejelzésben betöltött fontosságát állapította meg.

Kialakítottuk a **DaLibrary elektroniki-**

kus felületet, amely képes kezelni a projekt kutatásaihoz elengedhetetlenül szükséges publikációk és szakmai dokumentumok legfontosabb adatait. Teljesen univerzális elérést biztosít ezen anyagokhoz, lehetővé téve ezáltal biztonságos tárolásukat, átlátható formában történő rendszerezésüket, könnyű kereshetőségüket, elősegítve ezzel a hatékony tudományos és kutató munkát. A támogatás abban nyilvánult meg, hogy a fejlesztett informatikai rendszer segítségével egy elektronikus adatbázist hoztunk létre, ahol a tudományos dokumentumok (könyvek, cikkek, stb.) tárolhatók, és a adatrögzítés minden fázisa (feltöltés, ellenőrzés, elfogadás, disszemináció, stb.) szintén ezen informatikai rendszeren keresztül valósul meg. Elérhetősége: <https://dalib.nyf.hu>

MAPLE 15 komputeralgebrai rendszerrel olyan csomagok, modulok kerültek kifejlesztésre, amivel a diadikus analízissel foglalkozó kutatók gyorsan és áttekinthetően tudják különböző lokálisan konstans rendszerekre vonatkozó, a Fourier-analízisben gyakrabban használt függvényekkel és operátorokkal kapcsolatos számításo-



kat elvégezni. Ezek a csomagok használhatók többek között elért elméleti eredmények megerősítésére, ellenpéldák keresésére, publikációk és prezentációk illusztrálására és matematikai sejtések megkeresésére, megerősítésére. A rendszerek értékeinek kiszámítása új koncepció szerint történt, amely abból áll, hogy először diszkrét értékekkel számol, majd ezután építi fel azokat a függvényeket, melyek bizonyos intervallumokon állandóak.

Az orvosdiagnosztikában használatos, rétegfelvételek készítésére alkalmas eljárások többségének matematikai hátterét a Radon-transzformáció képezi. Ezért a projektcélok elérése érdekében egy **Radon-transzformációval kapcsolatos MATLAB toolbox-ot** készítettünk, amely bemutatja az alkalmazási lehetőségeket, különös tekintettel az inverz transzformációs eljárásokra. Oktatási, demonstrációs célra kellő számú példa került beépítésre. A CT eljárásokról, valamint ezek számítógépes realizációjára szolgáló numerikus algoritmusokról szóló elméleti összefoglaló **tanulmány** készült, ami alapján a toolbox-ban szereplő funkciók, és a használata során kapott eredmények értelmezhetőek a témában nem-szakember alkalmazók számára is. A tanulmány a következő témakörökre is kitért: a Radon transzformáció értelmezése és alap-

tulajdonságai, ortogonális polinomok, Fourier- és Radon transzformált, Radon transzformáció ortogonális bázisokban, FFT-n alapuló algoritmusok, Diszkrét Zernike-, Csebisev-sorfejtésen alapuló algoritmusok és összehasonlítás más MATLAB algoritmusokkal.

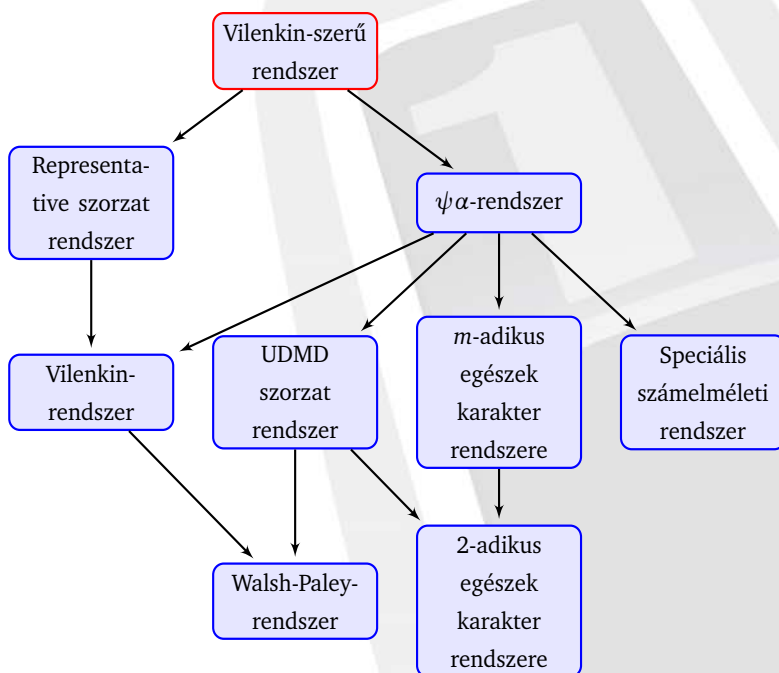
Az előbbihez hasonlóan egy a gyakorlatban szintén fontos alkalmazási területtel bíró rendszerrel is foglalkoztunk. Nevezetesen, egy a **Haar-rendszerrel kapcsolatos MATLAB toolbox-ot** készítettünk egy hozzátartozó **tanulmánnyal**. Ez utóbbi a következő témakörökre tért ki: a Haar-rendszer értelmezése és alaptulajdonságai, kapcsolat a Rademacher- és a Walsh-rendszerekkel, waveletekkel, gyors Haar-transzformáció, a Haar-rendszer martingáleméleti vonatkozásai, sorfejtések martingál differenciák szerint, algoritmusok a Fourier-egyutthatók és a részletösszegek kiszámítására, martingál differenciák szorzatrendszerei, UDM szorzatrendszerek, FFT algoritmusok szorzatrendszerekre, többváltozós szorzatrendszerek, Malmquist-Takenaka (MT) rendszerek, kétrétű Blaschke szorzatok szuperpozíciója, Rademacher-Blaschke-függvények, szorzatrendszerük, FFT algoritmusok, Rademacher-Blaschke szorzatok által generált MT rendszerek, racionális Haar-rendszerek.



Tudományos eredmények

A diadikus harmonikus analízis absztrakta elméletével foglalkozó kutatók lokálisan konstans rendszereket tanulmányoznak és teljes ortonormáltóságuk

a Fourier sorok elméletében alkalmaznak. Az olvasó a következő ábrán megtekintheti az egyes rendszerek közötti kapcsolatokat, általánosításokat.



Leggyakrabban vizsgált lokálisan konstans rendszerek és kapcsolatai

Először a legáltalánosabb rendszerrel a **Vilenkin-szerű rendszerrel** kezdjük, ez a rendszer több más jól ismert rendszert is tartalmaz. 1996-ban Gát és Weisz belátta a **kétdimenziós Walsh-**

rendszer $\sigma_n f$ Fejér közepeinek majdnem mindenütti konvergenciáját integrálható függvények esetén, feltéve, hogy a Fejér-középek indexei egy az identikus leképezés által meghatáro-



zott kúpban vannak, tehát a $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ egyenlőtlenség teljesül valamely fix $\beta \geq 1$ paraméterrel. Ezt az eredményt Gát és Nagy később általánosította, még pedig úgy, hogy az indexek egy kúpszerű halmazban vannak.

A projektben integrálható függvények Fejér-közepeinek majdnem mindenütti konvergenciáját bizonyítottuk **kétdimenziós Vilenkin-szerű rendszer** esetén, feltéve, hogy az indexek egy kúpszerű halmazban vannak. Tehát általánosítottuk Gát, Weisz és Nagy eredményét egy olyan sokkal általánosabb ortonormált rendszerre, amely tartalmazza a Walsh- a Vilenkin-rendszert, a 2-adikus egészek karakter rendszerét, az UDMD szorzat rendszert és e reprezentatív szorzat rendszereket.

Beláttuk, hogy a

$$\sigma_L^* f := \sup_{n \in L} |\sigma_n f|.$$

maximál operátor (ahol L egy kúpszerű halmaz) gyengén $(1, 1)$ tulajdonságú. Ebből standard eljárással adódik, hogy bármely $f \in L^1$ függvény esetén teljesül, hogy

$$\lim_{\substack{\wedge n \rightarrow \infty \\ n \in L}} \sigma_n f = f \quad \text{m.m.}$$

Ennek közvetlen következménye a Weisz és Gát előbb említett tétele. Te-

hát bármely $f \in L^1$ függvény és $\beta \geq 1$ rögzített szám esetén teljesül, hogy

$$\lim_{\substack{\wedge n \rightarrow \infty \\ \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta}} \sigma_n f = f \quad \text{m.m.}$$

Természetes kérdés, hogy a σ_L^* maximál operátor (ahol L egy kúpszerű halmaz, amely tartalmazza a kétdimenziós Fejér-közepek indexeit) milyen más tulajdonságokkal rendelkezik még. Vilenkin-térben csak azt láttuk be, hogy a σ_L^* maximál operátor gyengén $(1, 1)$ tulajdonságú. Speciális rendszerek esetén a maximál operátor korlátosságáról több is bizonyítható.

2011-ben Weisz megmutatta, hogy a σ_L^* maximál operátor, a **Walsh-Paley-rendszer** esetén, korlátos a H_p^α Hardy-térből a L_p térbe $p > 1/2$ esetén (itt a H_p^α Hardy-tért az α kúpszerű megszorító függvény segítségével definiálta.) A projekt során beláttuk, hogy a σ_L^* maximál operátor, a Walsh-Paley-rendszer esetén, nem korlátos a $H_{1/2}^\alpha$ Hardy-térből az $L_{1/2}$ térbe. Tehát megmutattuk azt, hogy a $p > 1/2$ feltétel lényeges a korábbi Weisz által belátott tételben.

A **Walsh-Kaczmarz-rendszer** esetén sem a pozitív, sem a negatív eredmény nem volt ismert. A projekt során, min két eredményt sikerült bebizonyítani.



Azaz, megmutattuk, hogy a $\sigma_L^{k,*}$ maximál operátor korlátos a H_p^α Hardy-térből az L_p térbe $p > 1/2$ esetén és nem korlátos a $H_{1/2}^\alpha$ Hardy-térből az $L_{1/2}$ térbe. Következésként azonnal adódik, hogy az f integrálható függvényre

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in L}} \sigma_n^k f = f \quad \text{m.m.}$$

teljesül (ez korábban nem volt ismert tétel). 2000-ben ezt a majdnem mindenütti konvergencia tételt Simon bizonyította, de csak kúpos megszorító halmaz esetén. Tehát, sikerült általánosítanunk Simon egy korábbi eredményét.

Reprezentatív szorzatrendszereknél nagy előrelépés történt nem kommutatív véges csoportok teljes direkt szorzatán értelmezett Fourier-sorok normakonvergencia vizsgálatában, hiszen eddig mindig negatív eredmény született. A vizsgált probléma az volt, hogy melyik $1 < p < \infty$ értékek esetén igaz, hogy az $S_n f$ Fourier-sor n -edik részletösszege konvergál az f függvényhez L^p -normában minden $f \in L^p$ esetén. Eddig csak olyan struktúráknál tudtuk a kérdést megválaszolni, ahol a konvergencia csak $p = 2$ esetében igaz. Gát Györgynek és Toledo Rodolfonak egy közös munkájukban sikerült igazolniuk, hogy korlátos rendű kvater-

nó csoport teljes direkt szorzat mellett van olyan reprezentatív szorzatrendszerek, hogy a vizsgált problémára a válasz igaz minden $1 < p < \infty$ esetén.

2001-ben Weisz belátta, hogy a **kétdimenziós Walsh-Fourier-sorok Marcinkiewicz-közepének** $\mathcal{M}^*(f)$ maximál operátora korlátos a $H_p(G^2)$ diadikus martingál Hardy-térből az $L_p(G^2)$ térbe $p > 2/3$ esetén. A $p = 2/3$ esetben Goginava belátta, hogy \mathcal{M}^* nem korlátos a $H_{2/3}(G^2)$ Hardy-térből az $L_{2/3}(G^2)$ térbe. Interpolációs tételekből következik, hogy \mathcal{M}^* nem korlátos a $H_p(G^2)$ térből a $weak-L_p(G^2)$ térbe $0 < p < 2/3$ esetén. Tehát, az \mathcal{M}^* maximál operátor korlátossága szempontjából a végpont a $p = 2/3$. Ez indokolja azt, hogy érdekesek lehetnek a végpontbeli tulajdonságok. 2008-ban Goginava belátta, hogy \mathcal{M}^* korlátos a $H_{2/3}(G^2)$ Hardy-térből a $weak-L_{2/3}(G^2)$ térbe. A projekt keretein belül folytattuk a $p = 2/3$ végpontbeli tulajdonságok vizsgálatát. $H_{2/3}(G^2)$ Hardy-térben a folytonossági modulussal megfogalmazott szükséges és elégséges feltételt találtunk a Walsh-Marcinkiewicz-közep konvergenciájára. Nevezetesen, beláttuk, a következőt. Legyen

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_{2/3}} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \text{ ha } k \rightarrow \infty$$



Ekkor

$$\|\mathcal{M}_n(f) - f\|_{H_{2/3}} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Megmutattuk, azt is, hogy ez a feltétel nem csak elégséges, de szükséges feltétel is. Van olyan $f \in H_{2/3}$ martingál, amelyre

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_{2/3}} = O\left(\frac{1}{2^{3k/2}}\right),$$

ha $k \rightarrow \infty$, de

$$\|\mathcal{M}_n(f) - f\|_{2/3} \not\rightarrow 0 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy mi állítható a H_p Hardy-térben, ha $0 < p < 2/3$. Ebben az esetben szintén megadtunk egy szükséges és elégséges feltételt a folytonossági modulus segítségével a H_p Hardy-térbeli konvergenciára. Legyen $1/2 < p < 2/3$, $f \in H_p(G^2)$ és

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_p} = o\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right),$$

ha $k \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\|\mathcal{M}_n(f) - f\|_{H_p} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Megmutattuk azt is, hogy ez a feltétel, nem csak elégséges, hanem szükséges

feltétel is. Létezik olyan $f \in H_p(G^2)$ martingál (ahol $0 < p < 2/3$), amelyre

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_p} = O\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right),$$

ha $k \rightarrow \infty$, de

$$\|\mathcal{M}_n(f) - f\|_{\text{weak-}L_p} \not\rightarrow 0 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Azért, hogy a tételünket belássuk a következő súlyozott maximál operátort definiáltuk a Walsh-Marcinkiewicz közepekre

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{*,p}(f) = \sup_{n \geq 1} \left| \frac{\mathcal{M}_n(f)}{n^{2/p-3}} \right|.$$

Megmutattuk, hogy a $\widetilde{\mathcal{M}}^{*,p}$ maximál operátor korlátos a $H_p(G^2)$ Hardy-térből az $L_p(G^2)$ térbe $0 < p < 2/3$ esetén. Szintén megmutattuk azt, hogy a $\{n^{2/p-3}\}_{n=1}^\infty$ sorozat pontos. Walsh-Marcinkiewicz-közepekre egy erős konvergencia tételt is belátunk. Azaz, létezik egy c_p abszolút konstans, hogy

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{\|\mathcal{M}_m(f)\|_{H_p}^p}{m^{3-3p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p$$

bármely $f \in H_p(G^2)$ esetén (ahol $0 < p < 2/3$). Szintén beláttuk azt, hogy a $\{m^{3-3p}\}_{m=1}^\infty$ sorozat bizonyos értelemben pontosan meghatározott.



2009-ben a **Walsh-Kaczmarz-rendszerre** Gát, Goginava és Nagy belátta azt, hogy a Marcinkiewicz-Fejér-közepek $\mathcal{M}^{\kappa,*}$ maximál operátora korlátos a H_p diadikus Hardy-térből az L_p térbe $p > 2/3$ esetén. Továbbá, Goginava és Nagy belátta azt, hogy a $\mathcal{M}^{\kappa,*}$ operátor nem korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből az $L_{2/3}$ térbe.

A projekt során megvizsgáltuk a $p = 2/3$ végpontbeli tulajdonságokat. Egy szükséges és elégséges feltételt adtunk meg a Walsh-Kaczmarz-Marcinkiewicz-közepek $H_{2/3}$ Hardy-térbeli konvergenciájára a folytonossági modulus segítségével. Ez a tétel a fenti Walsh-Paley-rendszer esetén megfogalmazott eredmény analogonja. Ezen kívül bebizonyítottuk, hogy az $\mathcal{M}^{\kappa,*}$ maximál operátor korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből a weak- $L_{2/3}$ térbe. Következésképpen megkapjuk Gát, Goginava és Nagy egy korábbi eredményét. Nevezetesen, hogy az integrálható függvények Walsh-Kaczmarz-Marcinkiewicz-közepei majdnem mindenütt konvergensek.

Az alábbi egyenlőtlenséget számos rendszerre bizonyították korábban, trigonometrikusra Smith 1983-ben, Walsh-Paley-re Simon 1987-ben, Vilenkinre Gát 1993-ben, valamint

Vilenkin-szerűre Blahota 2000-ben:

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{\|S_k f\|_1}{k} \leq \|f\|_{H_1}.$$

A projekt keretein belül Blahota István és George Tephnadze a következő eredményeket érték el. **Walsh-Paley-rendszerre**, (C, α) közepekre belátuk, hogy ha $0 < \alpha < 1$, akkor létezik c_α (csak α -tól függő) abszolút konstans, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{\|\sigma_k^\alpha f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}}{k} \leq c_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}$$

Szintén Walsh-Paley-rendszerre és (C, α) közepekre igazoltuk, hogy ha $0 < \alpha < 1$ és $0 < p < 1/(1 + \alpha)$, akkor létezik $c_{\alpha,p}$ (α -tól és p -tól függő) abszolút konstans, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\sigma_k^\alpha f\|_{H_p}^p}{k^{2-(1+\alpha)p}} \leq c_{\alpha,p} \|f\|_{H_p}^p.$$

Korlátos Vilenkin-rendszeren, Fejér-közepekre láttuk be, hogy ha $0 < p \leq 1/2$, akkor létezik c_α (csak α -tól függő) abszolút konstans, hogy

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \sum_{k=1}^n \frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p,$$

ahol $[x]$ az x egész részét jelöli.



A következő állítást korlátos Vilenkin-rendszerekre, a t_n Nörlund-közepre bizonyítottuk, így ez számos más, korábban belátott állítás általánosítása is egyben. Legyen $f \in H_{1/(1+\alpha)}$, ahol $0 < \alpha \leq 1$ és $\{q_n : n \geq 0\}$ egy monoton nem-növekvő sorozat, úgy hogy

$$n^\alpha / Q_n = O(1), \text{ amint } n \rightarrow \infty,$$

és

$$(q_n - q_{n+1}) / n^{\alpha-2} = O(1),$$

amint $n \rightarrow \infty$. Ekkor létezik c_α (csak α -tól függő) abszolút konstans, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{\|t_k f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}}{k} \leq c_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}.$$

A 2-adikus egészek karakterrendszerére vonatkozó Fourier sorok konvergencia kérdései között egy mintegy negyedévszázados megoldatlan kérdés volt az úgynevezett Taibleson sejtés, amelyet Gát 1997-ben igazolt. Miszerint a $\sigma_n^1 f$ közepek majdnem mindeütt az f függvényhez tartanak tetszőleges integrálható függvény esetében. 2007-ben Gát jelentősen általánosítva ezt az eredményt igazolta, hogy a $\sigma_n^\alpha f$ Cesáro közepek majdnem mindenütt f -hez konvergálnak hacsak f integrálható és $\alpha > 0$. Már jelen pályázat keretében Gát megadta a

rendszerre vonatkozó Fejér-féle magfüggvények zárt képletét, amelyet eddig eredménytelenül kerestek a téma kutatói. Ez az eredmény inspirálta a projekt két résztvevőjét, Gát György és Simon Ilona kutatókat, hogy további vizsgálatokat végezzenek kétváltozós függvények esetében. Ezeknek a vizsgálatoknak előzményeként neveznék meg Blahota és Gát közös eredményét, amely 2000-ben a Stud. Sci. Math. Hungar. lapban jelent meg és többek között belátja, hogy kétdimenziós integrálható függvények esetében igaz, hogy

$$\sigma_{n,m}^{1,1} f \rightarrow f \quad \text{m.m.},$$

hacsak $\max(n, m) / \min(n, m) \leq C$, $n, m \rightarrow \infty$. Azaz az (n, m) párok egy kúpban maradnak.

2014-ben Gát és Simon belátta (a cikk megjelenés alatt van az Acta Math. Hungar. című lapban), hogy hacsak $f \in L \log^+ L$ kétváltozós függvény, akkor

$$\sigma_{n,m}^{\alpha,\beta} f \rightarrow f$$

m.m., hacsak $n, m \rightarrow \infty$ és $\alpha, \beta > 0$. A szerzőpáros azt is belátta, hogy nem élesíthető az eredmény a következő értelemben: Bármely δ végtelenben eltűnő függvény esetén van olyan $f \in L \log^+ L \delta(L)$, hogy

$$\limsup_{n,m \rightarrow \infty} |\sigma_{n,m}^{1,1} f| = +\infty$$



majdnem mindenütt. Ezt az eredményt, mind a pozitív, mind a negatív részét sikerült d -dimenziós Fourier-sorokra is általánosítanunk.

A másik fontos eredményt, amely a Fejér féle magfüggvény pontos értékeinek ismeretén alapszik, Gát György és Nagy Károly látta be a projekt keretein belül. Nevezetesen, az egy dimenziós Fejér-közepék maximál operátora (H_p, L_p) tulajdonságú $p > 1/2$ -re. Ezen kívül a kúpos Fejér-közepék maximál operátoráról megmutattuk, hogy szintén korlátos a H_p Hardy-térből az L_p térbe $p > 1/2$ esetén, aminek egyenes folyománya Gát és Blahota korábbi majdnem mindenütti konvergencia tétele. Mind két esetben sikerült belátni, hogy a $p = 1/2$ esetben a maximál operátor korlátossága nem teljesül.

A projekt fontos része a diadikus analízis elméletének alkalmazása más tudományterületeken, például a **logisztikában**. Kutatásunk során a Walsh-féle diadikus gondolkodásmód kereslettervezésben való alkalmazhatóságára kerestük a válaszokat. A felvést, miszerint a diadikus gondolkodásmód hatékonyan alkalmazható lehet keresleti adatsorok jövőbeli viselkedésének előrejelzésére elsősorban a vizsgált módszertan kedvező tulajdonságai vetítették előre. Különböző szak-

területeken (pl. digitális jelfeldolgozás, matematika, orvos diagnosztika) már számos cikkben megfogalmazták, hogy a Walsh-alapú approximációs logika gyors, pontos, és igen gépközei, vagyis viszonylag kis erőforrás igény mellett becsülhető, mi több kézben tartható hibával lehet a valóságból mintavételezett jeleket reprodukálni, hiányos jeleket pótolni, megjavítani stb. A Walsh-alapú diadikus gondolkodásnak tehát számos alkalmazási területe terjedt el az elmúlt évtizedekben. A kutatók azonban joggal gondolták azt, hogy a lehetőségekhez képest még mindig kevés a gyakorlati alkalmazás. Ezekben felbuzdulva kezdtük meg a vizsgálatokat a kereslettervezés, illetve ennek egy részének tekinthető kereslet előrejelzésének területén.

Az előkészítő feladatok, illetve gyorsan elvégzett tesztek után viszonylag hamar világossá vált, hogy a Walsh-féle módszertan alkalmazása a nevezett területen nem lesz túl egyszerű. Ennek legfőbb oka egy, a kutatásunk egyik fontos kimenetének tekinthető megállapítás, miszerint *az eddig kifejlesztett matematikai módszertanokat és eszköztárat alapvetően meglévő, mintavételezett* (illetve hiányos, de mindenképpen a valós jelről már valami információt magában hordozó) *jelek vizsgálá-*



latára, feldolgozására, tetszőleges pontosságú megközelítésére fejlesztették ki, és nem a mintavételezett jelek jövőjének megsejtésére, predikcionálására. A kutatási célok tehát annyiban tovább bővültek, hogy az alkalmazhatóság vizsgálatát megelőzően egy olyan matematikai eszköz, illetve megoldás kifejlesztése is szükségessé vált, amellyel az eredetileg kitzűzött cél egyáltalán vizsgálhatóvá vált.

A fentebb megfogalmazott problémák vizsgálata, illetve a Walsh-féle diadikus gondolkodásmód megismerése során további alkalmazási lehetőségek is felszínre kerültek. A kereslettervezésnek több fázisa van, amelynek mind a mai napig az egyik leginkább problémás fázisa az *adatelőkészítés*, amelynek során a keresleti adatokat tervezésre alkalmas állapotba kell hozni. Ennek során az egyik legfontosabb feladat a *keresleti jelet torzító hatások megszüntetése*, amelyek rendszerint zajok formájában rakódnak a valós folyamatokat leképező keresleti jelre. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a zajos keresleti jelek aggregációjával, alacsonyabb szekvenciákon történő mintavételezésével, illetve alul- és/vagy felüláteresztő Walsh-alapú szűrés alkalmazásával kirajzolódhatnak a zajos keresleti jelben megtalálható valós folya-

matok (alapjel), amelyek növelhetik a későbbi előrejelzés hatékonyságát. Zajsűrés egyúttal a predikcionált jel esetében is alkalmazható. Fontos megállapítás továbbá az is, hogy a módszer sajnos bizonyos esetekben legalább olyan káros is lehet, mint amilyen hasznos az előbb bemutatott helyzetben, ugyanis eltávolíthat a keresleti adatsorokból olyan adatokat is, amelyek meghatározhatják az adatsor későbbi alakulását. Ezek miatt a szűrők paraméterezése nem triviális feladat, s az egy adott adatsorhoz leginkább alkalmas paraméterezés megtalálása még vélhetően igen hosszú ideig feladatot fog adni a kutatóknak, ugyanis mindezt jelenleg leginkább kézzel, tapasztalati úton kell megvalósítani.

A fentieknek megfelelően tehát a matematikusokkal karöltve az előrejelzésre alkalmas matematikai módszertan megtalálásán kezdtünk el dolgozni. Ebben a folyamatban számos lehetőséget kipróbáltunk (pattern detektáció, ciklus felismerés és duplikáció stb.), amelyeknek egy összefoglalásaként a 2013 novemberében megrendezett diadikus analízissel foglalkozó konferencián összeállítottuk az addig megszerzett tapasztalatokat. A véleményünk szerint *leginkább alkalmasnak mondható matematikai módszer-*



tan alkalmazásával azonban ezek után kezdtünk el foglalkozni. Ennek alapja egy igen egyszerű logika, amelyet a következő folyamat ír le:

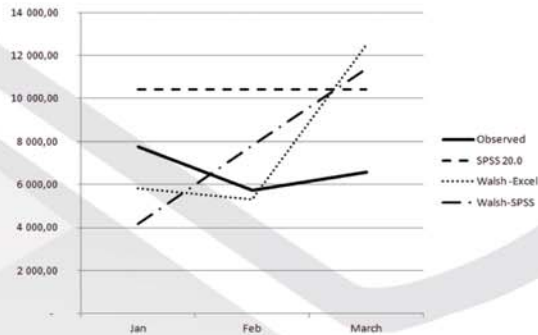
1. A rendelkezésre álló keresleti jel (lehetőség szerint szűrt alapjel) szezonális ciklusainak megke-re-sése.
2. Az ideális mintavételezési idő-köz megkeresése (nap, hét, hó-nap).
3. A keresleti jel feldarabolása, il-letve ennek megfelelően a min-tavételezési időköz által megha-tározott mintavételezése.
4. A ciklushosszhoz igazodó Walsh ordered Hadamard mátrix (WHM) leképezése.
5. A mintavételezett ciklusokhoz a Walsh-Fourier együtthatók kiszá-mítása a WHM segítségével.
6. A rendelkezésre álló (kiszámí-tott) Walsh-Fourier együtthatók segítségével a következő cik-lus walsh-fourier együtthatói-nak predikcionálása egy egy-szerű módszerrel (legyen ez pl. egy lineáris regresszió).
7. A predikcionált walsh-fourier együtthatók, illetve a WHM se-gítségével a keresleti jel vissza-

állítás, amely a predikciót fogja szolgáltatni.

Az előbb definiált módszertan szá-mos további kérdést vet fel. Ennek vizsgálatára egy olyan *teszt környe-zetet fejlesztettünk ki*, amelyben mes-terségesen előállított keresleti adato-kon (amelyeknek pontosan ismertük a tulajdonságait) vizsgálni lehetett, ho-gyan reagál a fenti algoritmus. Úgy ítéltük meg, hogy a tapasztalat jelensé-geket vizsgálni érdemes trendfolyama-tok (lineáris, degresszív, illetve prog-resszív trendek), bizonyos fajta sze-zonalitási tulajdonságokat produkáló, illetve ehhez kapcsolódóan alternáló (pl. sinusos) tulajdonsággal rendel-kező keresleti adatok esetében. Azt feltételeztük ugyanis, hogy ezek a mo-dellezett adatsorok tartalmaznak min-den olyan jelenséget, amelyek a tipikus diszkrét kereskedelmi adatsorok ese-tén előfordulhatnak, továbbá a keres-leti jelre ráakadó zajt is mestersége-sen elő lehet állítani, így annak hatását is vizsgálni lehet.

Az általunk kidolgozott diadikus ana-lízis alapú előrejelzést azonban össze tudtuk hasonlítani már ismert és szé-les körben alkalmazott módszerekkel. Egy valós idősoron való tesztelés a kö-vetkező eredményt hozta, összehason-lítva a piacon ismert, SPSS előrejelző szoftverrel:





A folytonos vonal mutatja a valós adatokat, a szaggatott az SPSS eredményt, a pöttyös pedig az Excelben alkalmazott általunk kifejlesztett algoritmus előrejelzést. Látható, hogy ez pontosabb, mint a mainstream módszerek eredménye. A lineáris, progresszív és degresszív zajmentes, valamint zajos keresleti idősorokon végzett predikciós tesztek eredményeinek kiértékelése során számos fontos tapasztalattal gazdagodtunk. Összességként az alábbi összefoglaló megállapítások tehetők:

1. Kimondható, hogy a Walsh-Fourier technikán alapuló predikciós gondolkodásmód alkalmazott működési logikája egy lehetséges módja egy már ismert idősor múltját leképező adatsor jövőjének előrebecslésére.
2. Kimondható egyúttal az is, hogy az alkalmazott megoldásnak a

vizsgált mesterségesen előállított adatsorokon világosan kimutatható *szisztematikus becslési hibája* van, amely kimondottam a *progresszív* és a *degresszív* trendeket tartalmazó adatsorok esetében már a *zajmentes* alapjel becslése során is észlelhető.

3. *Lineáris trendeket* tartalmazó zajos adatsorok esetében ez a hiba *nem jelentős* és *nem is szisztematikus* (fehér zaj), így ilyen esetekben a *módszer* elég jól teljesít a zajos esetekben is (az alapjelet 100%-os pontossággal becsli).
4. Az előbbi két megállapításból következtethető, hogy a predikciós módszer *szisztematikus hibája* tehát a zajos idősorban megtalálható, a *lineáristól eltérő* tulajdonsággal rendelkező *trendfolyamatokra vezethető* vissza.



5. A keletkező *szisztematikus hiba* mért értékének idősora a tesztek során mind a progresszív, mind a degresszív trendek esetében, jellegében igazodott a *teszt adatsor generálása során alkalmazott trendhez*.
6. Amennyiben tehát a vizsgált idősorban *kimutatható egy lineáristól eltérő* jellegű *trendjelenség, s ezt matematikailag paraméterezni is tudjuk* (pl. egy hatvány regresszió segítségével), akkor ebből egy *függvény transzformációval következtetni lehetne a szisztematikus hibára, azaz becsülni lehetne annak adott előrejelzési időpontra vonatkozó nagyságát, amellyel a predikciós módszer adott előrejelzési időpontra készített előrejelzését korrigálni lehetne*. Ehhez tehát *meg kellene találni azt a függvény transzformációs megoldást, amellyel a zajos idősorból megállapított trendfüggvényből előállítható a szisztematikus hibát becslő függvény*.

A fentebb összefoglalt megállapítások további kérdéseket vetnek fel. A teszteket mesterségesen előállított idősorokon végeztük, amelynek trendparamétereit szabályozni lehetett. A nem

„steril”, valós környezetből származó zajos adatsorok esetében, a benne „elrejtett” zajmentes alapjel kimutatására nézve azonban még nem léteznek a gyakorlatban igazán jól használható megoldások. Mindemellett tovább fokozza ezt a problémát, hogy általában nem áll rendelkezésre olyan nagy mennyiségű adat, amelyet a tesztek során a Dr. Bóna Krisztián által kifejlesztett generátor segítségével gond nélkül, gyorsan elő tudunk állítani. Ez különösen nagy problémát jelenthet viszonylag rövidebb életciklusú termékek esetében, ugyanis kevés adatból az idősorban található trendjellegzetességek kimutatása általában meglehetősen torz eredményeket produkálhat.

Mindezek ellenére, ilyen esetekben a rövidebb predikciós ciklusoknál az egyszerű lineáris trend feltételezése is megoldás lehet, viszont ekkor nem nyílik mód a predikciós hiba becsléses úton történő korrekciójára (mivel feltételezzük a nem szisztematikus, fehér zajként viselkedő hibát). A valós környezetből származó adatokon való eddig elvégzett tesztek megerősítették az előbb leírt fentebbi feltételezéseket, de egyúttal számos további kérdést is hoztak magukkal, amelynek a megválaszolására még további vizsgálatokat kell végezni.



A következő szakterület a **kiterjesztett kölcsönhatás mintázatra gyakorolt hatása ciklikusan domináns játékokban**. A ciklikus dominanciát mutató játékok alapvető szerepet játszanak a természetben megfigyelhető biodiverzitás, valamint a darwini szelekció alapuló prebiotikus evolúció és a strukturális komplexitás megértésében is.

A ciklikus kölcsönhatás elméleti vizsgálatát különösen indokolja annak a természetben megfigyelhető gyakori előfordulása. Érdekes példaként említhetjük az oldalfojtos gyíkok párzási stratégiáját, de bizonyos tengeri növények, vagy a genetikai szabályozás, illetve bizonyos baktériumok versengése is ide sorolható.

A biodiverzitás fennmaradásának a megértésében az említett zárt kört alkotó hierarchia jelenléte mellett gyakran kulcsszerepet játszhat a térbeli struktúra megléte. Például az *Escherichia coli* baktériummal végzett kísérletek rámutattak arra, hogy a Petri csésze által definiált geometriának lényeges szerepe van az egymással vetélkedő törzsek fennmaradásában. Ennek következtében az ún. kő-papír-olló, illetve hasonló ciklikus dominanciát mutató játékok térbeli változatai intenzíven vizsgált kutatási területek,

ahol a statisztikus fizika módszerei különösen hatékonyan alkalmazhatóak.

A projekt keretében elsődlegesen arra voltunk kíváncsiak, hogy miként befolyásolja a kialakuló térbeli mintázatot az a tény, hogy ha az egymással vetélkedő fajok kölcsönhatási körét kiterjesztjük. Konkrétabban, azt vizsgáltuk, hogy a négyzetrács geometriát feltételező kő-papír-olló játék eredményére milyen hatása van annak, ha a szokásos pár-kölcsönhatáson túl tágabb, ún. csoport kölcsönhatást feltételezünk. A fajok alapvető viszonyát az ábra bal szélén illusztráltuk.

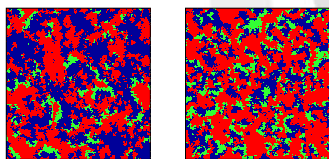
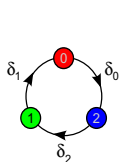
Meglepetésre eredményül azt kaptuk, hogy nem csupán a térbeliségnek van alapvető szerepe a kialakuló mintázatra, hanem az is lényeges, hogy milyen mértékű a definiált kölcsönhatás.

Megmutattuk, hogy a mintázat kválitatív módon is megváltozhat, ha a kölcsönhatást első-, majd másodszomszéd esetre is kiterjesztjük. Ennek következtében nem csupán a vetélkedő fajok egyensúlyi koncentrációjának számszerű értéke, hanem azok sorrendi viszonya (rangja) is változhat bizonyos paraméter értékeknél. Egy ilyen szembetűnő különbséget illusztrál a középső paneleken bemutatott mintázatok összehasonlítása.

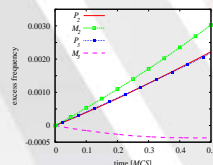
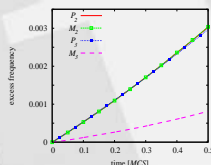
Megmutattuk, hogy a kölcsönhatási



távolság kiterjesztése nem csupán az egymással vetélkedő fajok inváziós sebességének nagyságát, hanem annak irányát is képes befolyásolni (akár azt esetleg meg is fordíthatja), ahogy azt a jobboldali panel grafikonjai is illusztrálják. Ezt a viselkedést nem lehet a hagyományos „kevert-térbeli” kondíciók eltérésén alapuló argumentum alapján megérteni.



Helyette a kulcsmomentum annak a felismerése volt, hogy a kiterjesztett kölcsönhatás eredményeképpen az egymással vetélkedő fajok között olyan ún. indirekt kölcsönhatás lép fel, ami két faj viszonyát a harmadik jelenlététől (vagy annak hiányától) teszi függővé, így az a párkölcsönhatás kereteiben belül nem értelmezhető.

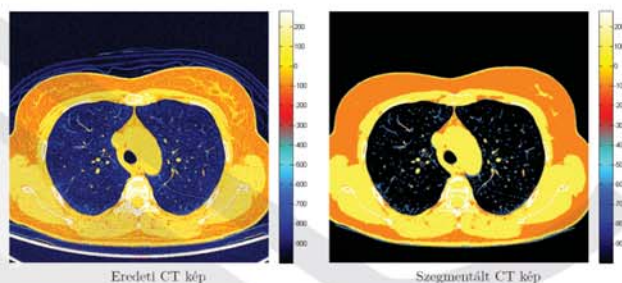


Bal oldal: a vetélkedő fajok invázióját definiáló modell. Középső: az eltérő kölcsönhatási távolság eredményeképp fellépő lényegesen különböző mintázat. Jobb oldal: Az eltérő invázióból fakadó doménfal mozgás különböző kölcsönhatási távolságoknál.

A projekt célkitűzéseinek megfelelően olyan, a **digitális jel- és képfeldolgozás** témakörébe tartozó kérdésekkel is foglalkoztunk, amelyekben kiemelt szerep jut a különböző transzformációs módszereknek, mint például a Radon transzformáció. A feldolgozási folyamat során az egyik alapvető fontosságú módszer a megfelelő ortogonális, biortogonális rendszerek szerinti sorfejtések alkalmazása. A nyíregyházi Jósa András Oktató Kórház Onkoradiológiai Osztályának vezetőjével Dr. Olajos Judittal, és a budapesti

PET Pozitron Diagnosztika Központ orvos igazgatójával, Dr. Lengyel Zsoltal kialakított együttműködésnek köszönhetően hozzájutottunk orvosi diagnosztikai, ezen belül pl. CT felvételekhez, így az ezen felvételek feldolgozásával kapcsolatosan felmerült problémák vizsgálatára helyeztük a hangsúlyt. Vizsgáltuk például a digitalizálásból adódó zaj hatását. Ehhez olyan úgynevezett fantom képeket használtunk, amelyeknek pontosan ki tudtuk számolni az inverz Radon transzformáltját.





Intenzitás szerinti szegmentálás

A sugárdózis csökkenésekor fellépő zajt is modelleztük. Ezeknek az eredményeknek a felhasználásával sikerült egy, a tüdő CT felvételek minőségét jellemző úgynevezett képminőség metrikát konstruálni. Az idevágó szakirodalmat feldolgozva tanulmányoztuk a legkorszerűbb referencia kép nélküli képminőség metrikákat. Ezek egyik közös jellemzője, hogy a mérőszám relatív, azaz egy adott kép esetén mutatja a minőség változás irányát, de két különböző kép minőségének összehasonlítására nem alkalmasak.

Az úgynevezett SKFCM (spatially constrained kernelized fuzzy C-mean) szegmentáló algoritmus módosításával, fejlesztésével és a paramétereknek a tüdő CT felvételekre való optimalizálásával sikerült olyan strukturális hasonlóságon alapuló SSIM metrikát kifejleszteni, amelyik objektív módon

jellemzi CT felvételek minőségét. Ez a mérőszám például alapja lehet egy, a későbbiekben kidolgozandó képjavítási eljárásnak.

Egy másik fontos terület, amivel foglalkoztunk a képek morfológiai elemzése, meghatározó képrészletek lokalizálása és jellemzése. A vizsgálandó képtartomány meghatározásához először is szükség van a tüdő kontúr beazonosítására. Erre a célra több létező algoritmus megvizsgálása után egy, az aktív kontúr technikán alapuló algoritmust fejlesztettünk ki. Az eredeti algoritmus a tüdő CT felvételekre nem működött megfelelően, ezért szükség volt a paraméterek változtatásán túl a minimalizálandó energia funkcionálnak egy újabb taggal való kibővítésére. Az ennek felhasználásával konstruált algoritmus a tesztképeken már megfelelően működött.



Tudományos eredmények

A tüdő belsejében lévő részek alak szerinti osztályozásával kapcsolatosan a csőszerű (ér), csomószerű (daganat) és határoló felületszerű részek szerinti megkülönböztetésre van szükség. Erre a célra a CT felvételekből generálható 3D-s modellt véve a diszkrét második derivált sajátértékein alapuló algoritmust konstruáltunk. A módszert először „szintetikus” körülmények között, majd pedig valódi CT felvételeken teszteltük. Az eredmények biztatók, aminek alapján az ismertetett módszer továbbfejlesztése jól alkalmazható eljárás kifejlesztéséhez vezethet.

A kutatások során heti rendszerességgel szemináriumot tartottunk, ame-

lyen fiatal kutatók, oktatók, doktórandszok mellett MSc-s hallgatók is részt vettek. Eredményül több diplomamunka, valamint egy TDK dolgozat született. Ez utóbbi az ELTE, Informatikai Kar 2014 tavaszi TDK konferenciáján első díjat nyert. További megemlítendő eredmény, hogy két PhD hallgató került felvételre a szóban forgó kutatási témában, valamint új területeket, módszereket tudtunk bevezetni az oktatásba.

A kutatás során olyan tapasztalatokat szereztünk, amelyek növelik az alkalmazói területtel való együttműködési lehetőségeinket.

