Tartalom

Bevezetés

A Nyíregyházi Főiskola Matematika és Informatika Intézetében működő diadikus harmonikus analízis kutatócsoport már több mint két évtizede dolgozik együtt. A csoport vezetője Gát György (1961, Esztergom, Magyarország). A kutató csoport további tagjai Blahota István (1968, Ózd, Magyarország), Nagy Károly (1969, Nyíregyháza, Magyarország) és Toledo Rodolfo (1966, Havanna, Kuba).

A kutatócsoport számos olyan nemzetközileg ismert és elismert eredményt ért el, amelyek vezető matematikai lapokban jelentek meg. Olyanokban mint például a Journal of Approximation Theory, Procedings of the American Matehmatical Society, vagy a Studia Mathematica és így tovább.

Több mint százötven cikket írtak ezidáig a kutatócsoport tagjai. A legtöbb cikk a Walsh függvények elméletével kapcsolatos. Ezek nemcsak a matematikai elmélet szempontjából érdekesek, de érdeklődése tarthatnak számot olyanok körében, akik különféle alkalmazásokkal foglalkoznak. Két példát említenénk meg: a digitális jelfeldolgozást és a differenciálegyenletek numerikus megoldásainak különféle módszereit.

A diadikus harmonikus analízis kutatócsoport, Szozopol, Bulgária, 2013

Előadások a „ Constructive Theory Of Functions” című konferencián, Várna, Bulgária, 2005

A kutatócsoport szoros munkakapcsolatot tart a magyar diadikus analízis kutatóiskolájával az ELTE egyetemen. Fontos kiemelni azt a szakmai együttműködést, amely Ushangi Goginavával tartanak, aki a Javakhishvili Tbilisi Állami Egyetem professzora Grúziában.

Ezenkívül a kutatócsoport tagjai nemzetközileg elismertek kutatási területükön és számos nemzetközi szakmai eseményen vettek részt, mint nemzetközi konferenciák, vagy előadást tartották egy mini-kurzusban posztgraduális hallgatóknak a pueblai Benemerita Autonóm Egyetemen, Mexikóban.

Ennek a kis könyvecskének az a célja, hogy egy rövid összefoglalóját adja a csoport tudományos munkájának néhány válogatott részéről. Továbbá az is, hogy egy bevezetését adja a diadikus harmonikus analízisnek. Végezetül megadjuk egy válogatott listáját azoknak a nemzetközi konferenciáknak, ahol előadásokat tartottunk az általunk elért eredményekről.

Nyíregyháza, 2013. július 15.

Gát György

Néhány kiemelkedő nemzetközi konferencia, ahol a kutatócsoport tagjai vettek részt

- Alexits Memorial Conference, Budapest, Hungary, 1999.
- International Conference on Functional and Approximation Theory, Maratea, Italy, 2004 and 2009.
- Constructive Theory Of Functions, Varna, Bulgaria, 2005.
- Fourier Analysis Extremal Problems and Approximation, Budapest (Alfréd Rényi Institute of Mathematics), Hungary, 2005, 2007 and 2009.
- Approximation and Optimization in the Caribbean, Santo Domingo, Dominican Republic, 2006
- International Conference in Fourier and Complex Analysis: Classical Problems-Current View, Protaras, Cyprus, 2006.
- New Trends and Directions in Harmonic Analysis, Approximation Theory, and Image Analysis, Inzell, Germany, 2007.
- International Workshop on Orthogonal Polynomials and Approximation Theory, Madrid, Spain 2008.
- Discrete Analysis and Applications (Walsh-Fourier Series, Symbolic Sequences-Complexity and Cryptography), Thessaloniki, Greece, 2008.
- Workshop on Dyadic Analysis and Related Areas with Applications, Dobogókő, Hungary, 2009.
- IV Simposio Internacional de Aproximación y Temas Afines, Puebla, Mexico 2010.
- Jaen Conference on Approximation Theory, Úbeda, Spain, 2010 and 2013.
- Thirteen International Conference on Computer Aided Systems Theory, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, 2011.
- Constructive Theory of Functions-2013, Sozopol, Bulgaria, 2013.

Walsh és Vilenkin rendszerek

Gát György

A Vilenkin rendszerek N.Ja. Vilenkin által [6] 1947-ben bevezetett általánosításai a Walsh-Paley rendszernek (a Walsh-Paley rendszer definíciója megtalálható például ezen könyvecske Nagy Károly által írott részében).

Egy Vilenkin rendszer elemei tetszőleges ciklikus csoportok teljes direkt szorzatának karaktereiből állnak. A következőképpen vezethetjük be a fogalmat.

Legyen $m := (m_k,\ k \in \mathbb{N})$ egy olyan pozitív egészekből álló sortozat, melynek elemeire igaz, hogy $m_k \geq 2$. Legyen $\mathscr{Z}_k$ az m_k-adrendű diszkrét ciklikus csoport, $(k \in \mathbb{N})$. Azaz, mindegyik csoporton adott a diszkrét topológia és a μ_k-val jelölt Haar mérték. A G kompakt *Vilenkin csoport* a $\mathscr{Z}_k$ (koordináta) csoportok teljes direkt szorzataként van definiálva. A topológia, a művelet és a mérték ((μ) jelöli) a szorzat topológia, művelet és mérték. Azaz, $x \in G$ nem más mint egy $x := (x_0, x_1, ...)$ sorozat, ahol $0 \leq x_k < m_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Ezt a sorozatot az x *kifejtésének* nevezzük.

A Rademacher függvény fogalmát a következőképpen általánosítjuk $m_k >$ 2-adrendű ciklikus csoportokra

$$\varphi_k^s(x) = \exp(2\pi\imath s x/m_k)$$

$(s \in \{0, \ldots m_k - 1\}), x \in \mathscr{Z}_{m_k},\ \imath^2 = -1)$. Az általánosított Rademacher függvények karakterei a ciklikus csoportnak.

Ahogy a Walsh rendszer esetében Paley módszerével, a Vilenkin rendszert is hasonló módszerrel adhatjuk meg. Csak most az általánosított hatványok nem 2 hatványok lesznek, hanem

$$M_0 := 1, \quad M_{k+1} := m_k M_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(A Walsh csoport esetében $m_k = 2$ és $M_k = 2^k$.) Minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen felírható a következő formában

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k \quad (0 \leq n_k < m_k,\ n_k \in \mathbb{N}).$$

Ezért mondhatjuk, hogy a $(n_0, n_1, \ldots)$ sorozat az *n szám m alapú kifejtése*. Az n és x kifejtésével definiáljuk a ψ rendszert:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \quad (x \in G).$$

Ezek a függvények lesznek a *Vilenkin rendszer* elemei. Megjegyezzük, hogy tehát a Walsh-Paley rendszer a Vilenkin rendszer egy speciális esete, ahol $m_k = 2$ $(k \in \mathbb{N})$. A Vilenkin függvények karakterek, ezért:

1. Tétel. *A ψ rendszer ortonormált és teljes a $L^2(G)$ téren.*

Egy G -n integrálható f függvény esetén definiáljuk a függvény Vilenkin-Fourier együtthatóit és Fourier sorának részletösszegeit a következő módon

$$\hat{f}(k) := \int_G f\overline{\psi}_k\, d\mu \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\psi_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A Vilenkin-Fourier sorok konvergencia kérdéseinek természetét nagyban befolyásolja az, hogy az m sorozat korlátos-e. Ha az, akkor azt mondjuk, hogy a G Vilenkin csoport korlátos. Ha a sorozat nem korlátos, akkor a G csoportot *nem korlátos csoport*nak mondjuk. Korlátos Vilenkin csoport esetében meglehetősen sok hasonlósággal használhatóak azok a módszerek, amelyek a Walsh esetben szokásosak, illetve alkalmazhatóak. Többek között jól ismert állítás:

2. Tétel. *Legyen G egy korlátos Vilenkin csoport. Ha $1 < p < \infty$ és $f \in L^p(G)$ akkor a Fourier sor n-edik részlet összege $S_n f$ az f függvényhez konvergál majdnem mindenütt és L^p normában is.*

A nem korlátos esetet sokkal nehezebb vizsgálni. Mindazonáltal, Young [7], Schipp [4] és Simon [5] igazolta a részlet összegek L^p normabeli konvergenciáját tetszőleges Vilenkin csoporton, hacsak $1 < p < \infty$.

Nem korlátos Vilenkin csoportokon a majdnem mindenütti konvergencia kérdése teljes mértékben nyitott még. Azaz, a trigonometrikus rendszerre ismert Carleson tétel kérdése nyitott. Ugyanakkor érdekes, hogy bármely $f \in L^1(G)$ esetében létezik olyan részsorozata a Fourier sor részletösszegeinek, amely f -hez konvergál m.m. (majdnem mindenütt). Ugyanis, a $S_{M_n} f$ részletösszegek egyben az f függvénynek a $I_n(x)$, $x \in G$ halmazok (intervallumok) által generált σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értékei. Ezért alkalmazható a martingál konvergencia tétel.

Eredmények, problémák

Először is egyváltozós integrálható függvények Walsh-Fourier sorának majdnem mindenütti szummabilitásáról szeretnénk beszélni. Walsh és

Vilenkin-Fourier sorok szummabilitásával kapcsolatban könyvet írt Weisz [25].

Az n-edik $(C,1)$ közepe, az n-edik Riesz's logaritmikus közepe az $f \in L^1(G)$ függvénynek:

$$\sigma_n f(y) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f(y),$$

$$R_n f(y) := \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k f(y)}{k}.$$

Mik is azok a (C,α) közepek? Röviden, legyen $A_n^\alpha := \frac{(1+\alpha)...(n+\alpha)}{n!}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ $(-\alpha \notin \mathbb{N})$. Az n-edik (C,α) közepe az $f \in L^1(G)$ függvénynek:

$$\sigma_{n+1}^\alpha f = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k f.$$

A Fourier sorok elméletének legfőbb kérdése az, hogy hogyan lehet egy függvényt helyreállítani a Fourier sorából. Említenénk két példát: Billard igazolta [1], hogy a Carleson tétel érvényes a Walsh-Paley rendszer esetében, azaz, bármely L^2-beli függvény esetében $S_n f \to f$ majdnem mindenütt. Fine [3] belátta, hogy a Walsh-Fourier sor (Walsh esetben $m_j = 2$ bármely $j \in \mathbb{N}$ esetén) m.m. (C,α) szummábilis, hacsak $\alpha > 0$. A $(C,1)$ szummabilitási tételt a p-sorok testére ($m_j = p$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén) Taibleson [14] igazolta, és később korlátos Vilenkin rendszerek esetében Pál és Simon [12].

Mi a helyzet nem korlátos Vilenkin csoportok esetében? Ez már egy teljesen más történet. A trigonometrikus, a Walsh vagy a korlátos Vilenkin esetekben kidolgoztt módszerek sokszor nem elég erősek. Egyike a fő problémáknak az, hogy a bizonyítások erősen támaszkodnak arra a tényre, hogy korlátos Vilenkin csoportokon (vagy a trigonometrikus esetben) a Fejér féle magfüggvények L^1 normái egyenletesen korlátosak. Ez nem igaz akkor, ha a G csoport (azaz az m generáló sorozat) nem korlátos [13]. Ebből következik az is, hogy Fejér eredeti tétele nem is igaz nem korlátos Vilenkin csoportokon. Price igazolta, [13] hogy tetszőleges m $(\sup_n m_n = \infty)$ és $a \in G$ esetében van olyan f a G csoporton folytonos függvény, hogy $\sigma_n f(a)$ nem konvergál $f(a)$-hez. Sőt, igazolta, [13] hogy ha $\frac{\log m_n}{M_n} \to \infty$, akkor létezik olyan f a G csoporton folytonos függvény, amelynek a Fourier sora egy $S \subset G$ nem megszámlálható halmazon nem $(C,1)$ szummálható.

Sőt, Price eredménye azt is implikálja, hogy bármely G nem korlátos Vilenkin csoporton meg lehet adni egy olyan $f \in L^1(G)$ integrálható függvényt, hogy a Fejér közepek $\sigma_{M_n} f$ részsorozata nem konvergál az f-hez az L^1 Lebesgue normában.

Ugyanakkor, a részletösszegek sorozata bármely $L^p, p > 1$ esetén normában konvergál a függvényhez a nem korlátos esetben is. Ebből persze triviálisan adódik, hogy igaz a következő normakonvergencia. $\sigma_n f \to f$ hacsak $f \in L^p$, ahol $1 < p < \infty$. De milyen pozitív állítást lehet mondani az L^1 esetben?

A Nörlund logaritmikus közepeket a következőképpen definiáljuk:

$$t_n f := \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k f}{n-k}.$$

Walsh-Paley rendszerekkel kapcsolatos Nörlund logaritmikus közepekről további részletek olvashatóak Gát, Goginava és Tkebuchava [10, 9, 11] cikkeiben. Gát és Goginava [10] igazolta (Walsh-Paley rendszerre), hogy van olyan $f \in L^1$ hogy

$$\|t_n f - f\|_1 \not\to 0.$$

Másrészt, Blahota és Gát [2] belátta, hogy a Nörlund logaritmikus közepek némely nem korlátos Vilenkin csoporton „jobban viselkednek”, mint a Fejér közepek. Azaz:

3. Tétel. *Ha $f \in L^1$ és*

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \log^2 m_k}{\log M_n} < \infty,$$

akkor

$$\|t_{M_n} f - f\|_1 \to 0.$$

Az $f \in C$ esetben a konvergencia a szupremum normára vonatkozik. Ez azt jelenti, hogy némely nem korlátos Vilenkin csoporton a t_{M_n} Nörlund logaritmimus közepek jobban viselkednek mint a σ_{M_n} Fejér közepek.

Másrészt, azt nem lehet mondani, hogy minden Vilenkin csoporton „jobb a t_n közép”. Ugyanis, Blahota és Gát igazolta [2]:

Ha $\log m_n = O(n^\delta)$ valamely $0 < \delta < 1/2$ esetén, akkor van olyan $f \in L^1$, hogy

$$\|t_n f - f\|_1 \not\to 0.$$

Meglepő, hogy a Walsh-Paley vagy a korlátos Vilenkin esetekben a Nörlund logaritmikus középek viselkedése rosszabb mint a Fejér középeké, de ez a helyzet megváltozik bizonyos nem korlátos Vilenkin csoportokon. Nyitott az a kérdés, hogy lehetséges-e megadni olyan nem korlátos m generáló sorozat, hogy igaz legyen a $\|t_n f - f\|_1 \to 0$ norma konvergencia bármely integrálható f esetében.

Fordítsuk figyelmünket újra a Fejér középek felé.

Ami a Fejér középek m.m. konvergenciáját illeti nem korlátos Vilenkin csoportokon, egy kissé többet lehet mondani. Nevezetesen, 1999-ben Gát [15] igazolta:

4. Tétel. *Ha $f \in L^p(G)$, ahol $p > 1$, akkor $\sigma_n f \to f$ majdnem mindenütt.*

Ez volt a legelső nem korlátos Vilenkin csoportokra vonatkozó Fejér közepek m.m. konvergenciáját illető „pozitív" eredmény. Lehetne mondani, hogy ez az eredmény egy könnyű következménye a Carleson tételnek, azaz az $S_n f \to f$ m.m. konvergenciának ($f \in L^p(G)$, ahol $p > 1$), csak ezzel egy gond van. Ez a részletösszegekre vonatkozó m.m. konvergencia állítás a Vilenkin csoportokon vizsgált Fourier analízis legnagyobb nyitott problémája.

Mindazonáltal lehetséges továbblépni az $L^1(G)$ tér irányába. 2003-ben Gát [17] egy részválaszt adott az L^1 esetre. Nevezetesen,

5. Tétel. *ha $f \in L^1(G)$, akkor ([17]) $\sigma_{M_n} f \to f$ majdnem mindenütt, ahol m egy tetszőleges generáló sorozat.*

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy ahogy mondtuk bármely nem korlátos Vilenkin csoporton meg lehet adni egy olyan $f \in L^1(G)$ függvényt, hogy a Fejér középek $\sigma_{M_n} f$ részsorozata nem konvergál a függvényhez az L^1 Lebesgue normában, de ugyanekkor a m.m. konvergencia meg fennáll. Véleményünk szerint ez a nem korlátos Vilenkin rendszerek egy igen érdekes tulajdonsága.

Probléma. Véleményünk szerint valószínű, hogy a [15, 17] cikkek módszereinek az alkalmazásával meg lehet javítani az eddigi eredményeket és be lehet látni, hogy $\sigma_n f \to f$ hacsak $f \in L \log^+ L$, ahol m tetszőeleges.

A nem korlátos Vilenkin csoportok egy osztályán Gát igazolta az eredeti Lebesgue tételt. Ennek az osztálynak az elemeit „ritkán nem korlátos" Vilenkin csoportoknak neveztük. Mi is ez?

Ha vannak olyan C és $L \in \mathbb{N}$ állandók, hogy bármely $i, j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\min(m_i, m_{i+j})}{(m_{i+1} \cdot \cdots \cdot m_{i+j-1})^L} \leq C$$

(a C állandó természetesen függhet a m sorozattól), akkor G Vilenkin csoportot ritkán nem korlátos Vilenkin csoportnak nevezzük. Minden korlátos Vilenkin csoport egyben ritkán nem korlátos Vilenkin csoport is. Sajnos, nem minden nem korlátos csoport lesz ritkán nem korlátos, mivel például a ritkán nem korlátosság implikálja, hogy $\min(m_i, m_{i+1}) \leq C$. Például ha (m_n) végtelenbe tart, akkor G nem lehet ritkán nem korlátos. Másrészt, azért van „sok" nem korlátos Vilenkin csoport, amely ritkán nem korlátos.

A [22] cikkben megtalálható a Fejér-Lebesgue bizonyítása ritkán nem korlátos Vilenkin csoportokra. Azaz,

6. Tétel. *legyen G egy ritkán nem korlátos Vilenkin csoport, és $f \in L^1(G)$. Ekkor $\sigma_n f \to f$ majdnem mindenütt.*

Érdekesség az, hogy be lehet látni, hogy, ha minden ritkán nem korlátos Vilenkin csoporton igaz a Carleson tétel, akkor igaz bármely nem korlátos Vilenkin csoporton is. Tehát van jelentősége a ritkán nem korlátos Vilenkin csoportok tanulmányozásának.

Probléma. Ez ideáig nem ismeretes semmilyen eredmény nem korlátos Vilenkin csoporton a Fourier sorok (C, α) $(0 < \alpha < 1)$ vagy a Riesz's logarithmikus szummabilitásával kapcsolatban.

Ezek után fordítsuk a figyelmünket újra a Walsh-Paley rendszer illetve csoport felé. Ez az a Vilenkin rendszer illetőleg csoport, amely generáló sorozata a konstans $m_k = 2$. Igen jelentős kérdés, hogy mit lehet mondani ezen bizonyos rekonstrukciós „kérdéskörröl", ha a részletösszegek sorozatának csak egy részsorozata áll rendelkezésre. 1936-ban Zalcwasser [24] azt kérdezte, hogy „mennyire lehet ritka" a természetes számokból álló $a(n)$ sorozat, ha azt tudja, hogy minden integrálható (vagy akár folytonos) függvényre

$$(1) \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_{a(n)} f \to f$$

„valamilyen értelemben". Ezt a problémát a trigonometrikus rendszer esetében folytonos függvényekre (egyenletes konvergencia) teljes mértékben megoldotta Zagorodnij és Trigub 1979-ben. Mégpedig, ha a a sorozat konvex, akkor a

$$\sup_n n^{-1/2} \log a(n) < +\infty$$

feltétel szükséges és elégséges az egyenletes konvergenciához tetszőleges folytonos függvényre. Ennek az eredménynek a Walsh-Paley rendszerre vonatkozó analógonja ez ideáig nem ismert. Csak elégséges feltételként ismert a trigonometrikus esetben ismertetett feltétel. Erről Glukhov [23] írt cikket.

A majdnem mindenütti konvergencia integrálható függvények esetében egy sokkal bonyolultabb kérdéskör. 1997-ben Belinksky igazolta, hogy a trigonometrikus rendszer esetében létezik olyan $a(n) \sim \exp(\sqrt[3]{k})$ sorozat, hogy a (1) reláció m.m. igaz bármely integrálható függvény esetében. Belinksky sejtése, hogy ha a a sorozat konvex, akkor a $\sup_n n^{-1/2} \log a(n) < +\infty$ feltétel szükséges és elégséges is. Azaz, ez lenne a válasz Zalcwasser [24] kérdésére (trigonometrikus rendszer, m.m. konvergencia, L^1-beli függvényekre). Igazoltuk, [19] hogy ez nem igaz a Walsh-Paley rendszerre. Lásd 7 tétel.

A [19] cikkben olvasható (7. tétel), hogy bármely a lakunáris sorozat (azaz $a(n+1)/a(n) \geq q > 1$) és bármely f integrálható függvény esetében (1) m.m. igaz. Ez a következő szempontból is érdekes. Ha az a sorozat lakunáris, akkor a $S_{a(n)}f \to f$ reláció m.m. teljeseül minden f függvényre, amely a H Hardy térben van. A trigonometrikus és a Walsh-Paley esetben ezt az eredményt a meg lehet találni a [8] (trigonometrikus eset) és Ladhawala (Stud. Math., 1976) (Walsh-Paley eset) cikkekben. De, mivel a H tér egy valódi altere a L^1 térnek, így persze érdekes vizsgálni a (1) relációt L^1-beli függvényekre és lakunáris a sorozatokra.

Bármilyen konvex a sorozatra (ahol $a(+\infty) = +\infty$ - természetesen) és bármilyen integrálható függvényre a Riesz's logaritmikus közepei a függvénynek majdnem mindenütt konvergálnak a függvényhez. Azaz, a Walsh rendszerre vonatkozó Riesz logaritmikus összegzési módszer tetszőleges integrálható függvényt rekonstruálni tud a Fourier sorának egy konvex indexű részsorozatából. Ennek az eredmények - ez ideiág - nem ismeretes a Vilenkin vagy a trigonometrikus rendszerre vonatkozó verziója.

A következő Walsh-Fourier sorok Fejér és logaritmikus közepeire vonatkozó állítást igazolta Gát [19].

7. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy olyan sorozat, amelyre $\frac{a(n+1)}{a(n)} \geq q > 1 (n \in \mathbb{N})$. Ekkor bármely $f \in L^1$ integrálható függvényre m.m.*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_{a(n)}f \to f.$$

8. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy konvex sorozat, amelyre $a(+\infty) = +\infty$. Ekkor bármely f integrálható függvényre m.m.*

$$\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N} \frac{S_{a(n)}f}{n} \to f.$$

Két dimenziós függvények

Ebben a részben főként a Walsh esettel foglalkozunk. Azaz, $m_k = 2$, $r_k(x) = (-1)^{x_k}, \omega_n(x) = (-1)^{\sum n_k x_k}$.

Ekkor a G Walsh csoport reprezentálható a $[0,1)$ intervallummal is a jólismert módon. $f:[0,1)\times[0,1)\to\mathbb{C}$, $\omega_{k,n}(x,y):=\omega_k(x)\omega_n(y)$.

A kétdimenziós Fourier együtthatók a következő módon vannak definiálva

$$\hat{f}(k,n)$$
$$:=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\omega_{k,n}(x,y)dxdy.$$

A kétdimenziós Fourier sor (téglány) részletösszegei

$$S_{M,N}f(x,y)$$
$$:=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{f}(k,n)\omega_{k,n}(x,y).$$

A kétdimenziós Fejér középek:

$$\sigma_{M,N}f(x,y)$$
$$:=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}S_{k,n}f(x,y).$$

Ugyanazok a kérdések várnak minket, mint az egydimenziós esetben. Azaz, hogyan lehet egy függvényt rekonstruálni, ha csak a Walsh-Fourier együtthatóit ismerjük? Milyen értelemben és milyen feltételek között mondhatjuk, hogy $\sigma_{M,N}f(x,y)\to f(x,y)$?

A klasszikus trigonometrikus rendszer esetében két történeti eredményt említenénk. 1935-ben Jessen, Marcinkiewicz és Zygmund (Fund. Math., 1935) igazolta, hogy $\sigma_{M,N}f\to f$ m.m. (majdnem mindenütt), hacsak $\min\{m,n\}\to\infty$, amennyiben $f\in L^1\log^+L^1$. 1939-ben Marcinkiewicz és Zygmund (Fund. Math.) belátta, hogy $\sigma_{M,N}f\to f$ a.e., hacsak $1/\beta\le M/N\le\beta$.

Kétdimenziós Walsh-Paley rendszerre vonatkozó Fejér közepekre 1992-ben Móricz, Schipp és Wade (Trans Amer. Math. Soc.) látta be a feltétel nélküli (Pringsheim értelemben vett) konvergenciát $L\log^+L$-beli függvényekre és a „megszorított változatot” L^1-beli függvényekre, egész pontosan azt, hogy $\sigma_{2^n,2^m}f\to f$ hacsak $|n-m|\le C$.

1996-ban Weisz (Trans. Amer. Math. Soc.) és Gát (Annales Univ. Sci. Budapestiensis) megjavította ez utóbbi eredményt. Azaz, igazolta az L^1 esetet tetszőleges index párokra, nemcsak 2 hatványokra. Megjegyezzük, hogy Gát [18] igazolta nem korlátos Vilenkin rendszerekre is Móricz, Schipp és Wade fenntebb említett „megszorított indexű” konvergencia eredményét $L\log^+L$-beli függvényekre.

Szintén érdekes kérdés, hogy lehetséges-e gyengíteni a „kúpos megszorítást” úgy, hogy a m.m. konvergencia maradjon meg minden integrálható függvényre. Negatív választ adunk mind a megszorítás mind a tér szempontjából.

Első ilyen eredmény Gát [16] cikke a következőt állítást tartalmazza. Legyen $\delta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ mérhető és $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0$. Ekkor van olyan $f \in L^1([0,1)^2)$, hogy $f \in L\log^+ L\delta(L)$ és $\sigma_{n_1,n_2} f$ nem konvergál f-hez m.m. hacsak $\min(n_2, n_2) \to \infty$.

Továbbá, Gát (Analysis Math., 2001) igazolta, hogy:

9. Tétel. *Legyen δ ahogy feljebb, $w : \mathbb{N} \to [1,\infty)$ monoton növekedő, $w(+\infty) = +\infty$. Ekkor van olyan $f \in L^1([0,1)^2)$ függvény, hogy $f \in L(\log^+ L)\delta(L)$ és*

$$\lim_{\substack{\wedge n\to+\infty,\\ \vee n/\wedge n\le w(\wedge n)}} \sigma_{n_1,n_2} f \neq f \quad m.m.$$

Ha mégiscsak azt akarjuk, hogy a kétdimenziós Fejér közepek bármely $L^1([0,1)^2)$-beli függvényre m.m. konvergensek legyenek, olyan indexpárok mellett, amelyek „egymáshoz nincsenek közel", akkor is lehet állítani bizonyos feltételek mellett konvergenciát. Gát (Acta Math. Hungar., 2012) igazolta a Walsh-Paley rendszerre:

10. Tétel. *Legyen $a = (a_1, a_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ egy sorozat, melyre $a_j(+\infty) = +\infty$ $(j = 1, 2)$. Tegyük fel, hogy van olyan $\alpha > 0$, hogy $a_j(n+1) \ge \alpha \sup_{k\le n} a_j(k)$ $(j = 1, 2,\ n \in \mathbb{N})$. Ekkor bármely $f \in L^1([0,1)^2)$ integrálható függvény esetében m.m.*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{a(n)} f = f.$$

Ugyanez az eredmény trigonometrikus rendszere a [20] cikkben olvasható. Egy másik módszer arra, hogy hogyan lehet visszaállítani egy függvényt Fourier együtthatóinak az ismeretében a Marcinkiewicz közepekkel való közelítés. A Marcinkiewicz közepek $f \in L^1(G^2)$-beli függvényekre:

$$t_n f(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_{k,k} f(x).$$

Marcinkiewicz (Ann Soc. Polon. Math., 1937) trigonometrikus rendszerre $L\log^+ L$-beli függvényekre igazolta, hogy $t_n f \to f$ m.m. Az „L^1 eredményt" a trigonometrikus, Walsh-Paley és korlátos Vilenkin rendszerekre a következők bizonyították: Zhizhiasvili (Izv. Akad. nauk USSR Ser Mat., 1968) (trigonometrikus rendszer), Goginava (Bull. Georgian Acad. Sci. 161, 2000) és Weisz (J. Math. Anal. Appl., 2000), illetve Goginava (Math. Anal. és Appl., 2003) (d dimenziós eset, Walsh rendszer), Gát (Georgian J. of Math., 2004) (korlátos Vilenkin rendszerek).

Gát egy friss Walsh-Paley rendszerre vonatkozó, a Marcinkiewicz közepekkel kapcsolatos általánosítása a következő. Definiáljuk a Marcinkiewicz-szerű közepeket: $|n| = \lfloor \log_2 n \rfloor$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$,

$$t_n^\alpha f(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_{\alpha_1(|n|,k),\alpha_2(|n|,k)} f(x).$$

A következő két feltétel kiemelt szerepet játszik a Marcinkiewicz-szerű közepek viselkedésében.

$$\#\{l \in \mathbb{N} : \alpha_j(|n|, l) = \alpha_j(|n|, k), l < n\}$$
$$\leq C \quad (k < n),$$
$$\max\{\alpha_j(|n|, k) : k < n\} \leq Cn,$$

$(n \in \mathbb{P}, j = 1, 2)$.

Konvergencia tétel, Gát [21]:

11. Tétel. *Legyen α olyan, hogy kielégíti a fennti két feltételt. Ekkor $t_n^\alpha f \to f$ majdnem mindenütt ($f \in L^1(G^2)$).*

Divergencia tétel, Gát [21]:

12. Tétel. *Legyen $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges olyan függvény, hogy $\gamma(+\infty) = +\infty$. Ekkor van olyan α függvény, amely kielégíti az első feltételt, valamint*

$$\max\{\alpha_1(|n|, k) : k < n\} \leq Cn,$$
$$\max\{\alpha_2(|n|, k) : k < n\} \leq Cn\gamma(n)$$

és olyan $f \in L^1(G^2)$, hogy $\limsup_{n\in\mathbb{N}} |t_n^\alpha f| = +\infty$ majdnem mindenütt.

Végezetül a konvergencia tétel egy következménye: Gát [21]

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} S_{\alpha_1(n,k),\alpha_2(n,k)} f(x) \to f$$

m.m. bármely $f \in L^1(G^2)$ esetén ($\alpha_j(n, k) \leq C2^n$).

Hivatkozások

[1] P. Billard, *Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0, 1)$*, Studia Math. **28** (1967), 363–388.

[2] I. Blahota és G. Gát, *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin csoports.*, Anal. Theory Appl. **24** (2008), no. 1, 1–17.

[3] N.J. Fine, *Cesàro summability of Walsh-Fourier series*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955), 558–591.

[4] F. Schipp, *On L^p -norm convergence of series with respect to product systems*, Analysis Math. **2** (1976), 49–63.

[5] P. Simon, *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen II.*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **27** (1976), 329–341.

[6] N. Ja. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal system*, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat. **11** (1947), 363–400.

[7] W.S. Young, *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 311–320.

[8] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, University Press, Cambridge, 1959.

[9] G. Gát és U. Goginava, *Maximal convergence space of a subsequence of the logarithmic means of rectangular partial sums of double Walsh-Fourier series*, Real Analysis Exchange **31** (2006), no. 2, 447–464.

[10] G. Gát, *Uniform és L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series.*, Acta Math. Sin., Engl. Ser. **22** (2006), no. 2, 497–506.

[11] G. Gát, U. Goginava, és G. Tkebuchava, *Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series.*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), no. 1, 535–549.

[12] J. Pál és P. Simon, *On a generalization of the concept of derivative*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **29** (1977), 155–164.

[13] J. Price, *Certain csoports of orthonormal step functions*, Canadian J. Math. **9** (1957), 413–425.

[14] M.H. Taibleson, *Fourier Series on the Ring of Integers in a p-series Field*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 623–629.

[15] G. Gát, *Pointwise convergence of the Fejér means of functions on unbounded Vilenkin csoports.*, J. Approximation Theory **101** (1999), no. 1, 1–36 (English).

[16] G. Gát, *On the divergence of the $(C,1)$ means of double Walsh-Fourier series.*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 6, 1711–1720 (English).

[17] G. Gát, *Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems.*, J. Approximation Theory **124** (2003), no. 1, 25–43 (English).

[18] G. Gát, *On the pointwise convergence of Cesàro means of two-variable functions with respect to unbounded Vilenkin systems.*, J. Approximation Theory **128** (2004), no. 1, 69–99 (English).

[19] G. Gát, *Almost everywhere convergence of Fejér és logarithmic means of subsequences of partial sums of the Walsh-Fourier series of integrable functions.*, J. Approx. Theory **162** (2010), no. 4, 687–708 (English).

[20] G. Gát, *Convergence of sequences of two-dimensional Fejér means of trigonometric Fourier series of integrable functions.*, J. Math. Anal. Appl. **390** (2012), no. 2, 573–581 (English).

[21] G. Gát, *On almost everywhere convergence és divergence of Marcinkiewicz-like means of integrable functions with respect to the two-dimensional Walsh system.*, J. Approx. Theory **164** (2012), no. 1, 145–161 (English).

[22] G. Gát, *Almost everywhere convergence of Fejér means of L^1 functionson rarely unbounded Vilenkin csoports.*, Acta Math. Sin., Engl. Ser. **23** (2007), no. 12, 2269–2294.

[23] V.A. Glukhov, *Summation of Fourier-Walsh series.*, Ukr. Math. J. **38** (1986), 261–266 (English. Russian original).

[24] Z. Zalcwasser, *Sur la sommabilité des séries de Fourier.*, Stud. Math. **6** (1936), 82–88.

[25] F. Weisz, *Summability of multi-dimensional Fourier series és Hardy spaces. Mathematics és Its Applications*, Kluwer Acad. publ, Dordrecht, Boston, London, 2002.

Marcinkiewicz-közepek

Nagy Károly

Röviden ismertetjük a diadikus harmonikus analízis elméletét [1, 27]. Jelöljük a pozitív egészek halmazát $\mathbb{P}$-vel és legyen $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Legyen $\mathbb{Z}_2$ a másodrendű diszkrét ciklikus csoport, tehát $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, a modulo 2 összeadás művelettel és legyen minden halmaz nyílt. Az egyelemű halmazok mértéke legyen $1/2$, ami egy Haar-mértéket határoz meg. Megszámlálhatóan végtelen sok $\mathbb{Z}_2$ ciklikus csoport teljes direkt szorzatát G-vel jelöljük. G elemei olyan sorozatok, melyek $x = (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ alakúak, ahol az $x_k \in \{0,1\} \, (k \in \mathbb{N})$ koordináták. G-n a művelet legyen a koordinátánkénti összeadás, a mérték a szorzatmérték (melyet μ-vel jelölünk), a topológia pedig a szorzattopológia. A G kompakt Ábel-csoportot Walsh-csoportnak nevezzük. A topológia környezetbázisát megadhatjuk a következő módon:

$$
\begin{aligned}
&I_0(x) := G, \\
&I_n(x) := I_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) \\
&:= \{y \in G : \; y = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_n, \ldots)\}
\end{aligned}
$$

$(x \in G, n \in \mathbb{N})$. Ezeket a halmazokat diadikus intervallumoknak nevezzük. Jelölje $0 = (0 : i \in \mathbb{N}) \in G$ a G nulla elemét és legyen $I_n := I_n(0) \, (n \in \mathbb{N})$. Legyen $e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in G$, ahol az n-dik koordináta 1, a többi pedig 0 $(n \in \mathbb{N})$.

$k \in \mathbb{N}$ és $x \in G$ esetén legyen a k-dik Rademacher-függvény

$$r_k(x) := (-1)^{x_k}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ számot $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$ alakban is megadhatunk, ahol $n_i \in \{0,1\} \quad (i \in \mathbb{N})$, azaz n-t a kettes számrendszerben adtuk meg. Legyen n rendje az $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$ szám, tehát $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

A Walsh-Paley-rendszer a Rademacher-függvények szorzatrendszere. Tehát

$$
\begin{aligned}
w_n(x) &:= \prod_{k=0}^{\infty} \left(r_k(x)\right)^{n_k} \\
&= r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k}
\end{aligned}
$$

ahol $x \in G, n \in \mathbb{P}$. A Walsh-Kaczmarz-függvényeket $\kappa_0 = 1$ és $n \geq 1$ esetén

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} (r_{|n|-1-k}(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}$$

képlettel definiálják. A Walsh-Kaczmarz-függvények halmaza és a Walsh-Paley-függvények halmaza diadikus blokkonként megegyezik. Azaz $\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} = \{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$ minden $k \in \mathbb{P}$ esetén, és $\kappa_0 = w_0$.

V. A. Skvortsov (lásd [28]) a következő $\tau_A : G \to G$ reláció segítségével megadta a kapcsolatot a Walsh-Kaczmarz-függvények és a Walsh-Paley-függvények között:

$$\tau_A(x) := (x_{A-1}, ..., x_1, x_0, x_A, ...)$$

ahol $A \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2^{|n|}}(\tau_{|n|}(x))$$

minden $n \in \mathbb{N}, x \in G$ esetén. A Dirichlet-féle és a Fejér-féle magfüggvények

$$D_n^\alpha := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k,$$

$$K_n^\alpha(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k^\alpha(x)$$

alakban adottak, ahol $\alpha_n = w_n$ (minden $n \in \mathbb{P}$ esetén) vagy $\alpha_n = \kappa_n$ (minden $n \in \mathbb{P}$ esetén), $D_0^\alpha := 0$. A 2^n-dik Dirichlet-féle magfüggvény (lásd [27]) nagyon egyszerűen viselkedik

$$D_{2^n}^w(x) = D_{2^n}^\kappa(x) = D_{2^n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \notin I_n, \\ 2^n, & \text{if } x \in I_n. \end{cases}$$

A 2^{-2k} mértékű kétdimenziós négyzetek által generált σ-algebrát F_k-val fogjuk jelölni ($k \in \mathbb{N}$). Legyen $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ egy egyparaméterű martingál az $\left(F_n, n \in \mathbb{N}\right)$ σ-algebra sorozatra vonatkozóan (bővebben [30, 31]). Az f martingál maximálfüggvénye $f^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|f^{(n)}\right|$. $0 < p < \infty$ esetén a $H_p(G^2)$ Hardy-martingáltér az összes olyan martingált tartalmazza, amelyre $\left\|f\right\|_{H_p} := \left\|f^*\right\|_p < \infty$ teljesül.

Két Walsh-(Kaczmarz)-rendszer szokásos

$$\left(\alpha_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\right)$$

Kronecker-szorzatát kétdimenziós Walsh-(Kaczmarz)-rendszernek nevezzük. Tehát,

$$\alpha_{n,m}(x^1, x^2) = \alpha_n(x^1)\alpha_m(x^2).$$

Az $f \in L\left(G^2\right)$ esetén az $\widehat{f}^\alpha(n, m) := \int_{G^2} f \alpha_{n,m}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ számokat az

f függvény (n,m)-dik Walsh-(Kaczmarz)-Fourier-együtthatóinak nevezzük. Ezt a definíciót a martingálokra is kiterjeszthetjük (lásd Weisz [30, 31]). Legyen $S^{\alpha}_{n,m}$ a Walsh-(Kaczmarz)-Fourier-sor (n,m)-dik rektanguláris részletösszege. Azaz,

$$S^{\alpha}_{n,m}(f) := \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} \widehat{f}^{\alpha}(k,i)\alpha_{k,i}.$$

Marcinkiewicz-közepek és magfüggvények

Az f martingál Marcinkiewicz-Fejér-közepeit

$$\sigma^{\alpha}_{n}(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S^{\alpha}_{k,k}(f)$$

alakban adjuk meg. A kétdimenziós Dirichlet-féle és Marcinkiewicz-Fejér-féle magfüggvény

$$D^{\alpha}_{k,l}(x^1,x^2) := D^{\alpha}_{k}(x^1)D^{\alpha}_{l}(x^2),$$

$$K^{\alpha}_{n}(x^1,x^2) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^{\alpha}_{k,k}(x^1,x^2).$$

Az n-dik Marcinkiewicz-Fejér-féle magfüggvény egy alkalmas felbontását adta meg a szerző [19] a Walsh-Kaczmarz-rendszer esetén

$$\begin{aligned}
nK^{\kappa}_{n} &= 1 + \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j D_{2^j,2^j} \\
&+ \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j D^1_{2^j} r^2_j K^w_{2^j} \circ \tau^2_j \\
&+ \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j D^2_{2^j} r^1_j K^w_{2^j} \circ \tau^1_j \\
&+ \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j r^1_j r^2_j K^w_{2^j} \circ \left(\tau^1_j, \tau^2_j\right) \\
&+ (n-2^{|n|})(D_{2^{|n|},2^{|n|}} \\
&+ D^1_{2^{|n|}} r^2_{|n|} K^w_{n-2^{|n|}} \circ \tau^2_{|n|} \\
&+ D^2_{2^{|n|}} r^1_{|n|} K^w_{n-2^{|n|}} \circ \tau^1_{|n|} \\
&+ r^1_{|n|} r^2_{|n|} K^w_{n-2^{|n|}} \circ (\tau^1_{|n|}, \tau^2_{|n|}).
\end{aligned}$$

Legyen

$$K^{\omega}_{a,b} := \sum_{j=a}^{a+b-1} D^{\omega}_{j,j},$$

és $n^{(s)} := \sum_{i=s}^{\infty} n_i 2^i$ $(n,s \in \mathbb{N})$, ekkor $K^{\omega}_{n^{(s+1)},2^s}$ az n-dik Marcinkiewicz-féle magfüggvény egy szelete. Egyszerűen adódik, hogy

$$nK^{\omega}_{n} = \sum_{s=0}^{|n|} n_s K^{\omega}_{n^{(s+1)},2^s}.$$

A $K^{\omega}_{n^{(s+1)},2^s}$ magfüggvény szeletek pontos értékeit szintén a [19] cikkben találhatjuk.

Legyen $\alpha : [0,\infty) \to [1,\infty)$ egy monoton növekvő függvény és definiáljuk a $K_\alpha^{\omega,*}$ súlyozott maximálfüggvényt a

$$K_\alpha^{\omega,*}(x^1,x^2) := \sup_{n\in\mathbb{P}} \frac{|K_n^\omega(x^1,x^2)|}{\alpha([\log n])}$$

alakban $(x^1,x^2) \in G^2$ esetén. Walsh-rendszerre a következő eredmény ismert [20](a Walsh-Kaczmarz-rendszer esetén az analóg tétel még nem bizonyított):

1. Tétel. *Létezik olyan C pozitív konstans, amellyel a*

$$\frac{1}{16}\sum_{A=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(A)} \le \|K_\alpha^{\omega,*}\|_1 \le C\sum_{A=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(A)}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Tehát, $K_\alpha^{\omega,*} \in L^1$ pontosan akkor, ha $\sum_{A=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(A)} < \infty$.

A Marcinkiewicz-közepek vizsgálata 1939-ben kezdődött el. A kétdimenziós $S_{j,j}(f)$ trigonometrikus Fourier-részletösszegekre Marcinkiewicz [18] megmutatta, hogy az $L\log L([0,2\pi]^2)$ térbeli f függvények

$$\sigma_n f = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{j,j}(f)$$

közepei majdnem mindenütt az f függvényhez tartanak $n \to \infty$ esetén. Zhizhiashvili [32] általánosította ezt az eredményt $f \in L([0,2\pi]^2)$ függvényekre és (C,α)-közepekre $(\alpha > 0)$. Dyachenko [2] pedig 2-nél magasabb dimenzióban mutatta meg az analóg eredményt.

A Walsh-rendszer esetén a Marcinkiewicz-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját Weisz [29] és Goginava [8] látta be (magasabb dimenzióban Goginava [9]). A Walsh-Kaczmarz-rendszer esetén Nagy [21] a Vilenkin-rendszer esetén pedig Gát [3] bizonyította a tételt. Tehát, teljesül a következő:

2. Tétel. *Minden $f \in L^1$ esetén*

$$\sigma_n \to f \quad m.m.$$

A bizonyítások során a

$$\sigma^* f := \sup_{n\in\mathbb{P}} |\sigma_n f|$$

maximáloperátorra belátták a következő tételt:

3. Tétel. *A σ^* operátor gyengén $(1,1)$-típusú és (p,p)-típusú minden $1 < p \le \infty$ esetén.*

Később, ezeket az eredményeket általánosította (C,α)-közepekre Gát és Goginava [4] a kétdimenziós (korlátos) Vilenkin-rendszer esetén illetve

Gát és Nagy a kétdimenziós Walsh-Kaczmarz-rendszer [7] esetén. Tehát, a következőt mutatták meg, a Fourier-sor kvadratikus részletösszegeiből képzett (C,α)-közepek maximáloperátora gyengén $(1,1)$-típusú és (p,p)-típusú $1 < p \leq \infty$ $(0 < \alpha < 1)$ esetén. Sőt, igaz a következő:

4. Tétel. *Legyen $f \in L^1$ és $\alpha > 0$ ekkor $\sigma_n^\alpha f \to f$ majdnem mindenütt, ha $n \to \infty$.*

A σ^* maximáloperátor korlátosságát Weisz tárgyalta a Walsh-rendszer [29], Goginava a korlátos Vilenkin-rendszer [12], és Gát, Goginava és Nagy a Walsh-Kaczmarz-rendszer [5, 6] esetén, ez utóbbit két lépésben mutatták meg. Teljesül a következő:

5. Tétel. *A σ^* maximáloperátor korlátos a H_p Hardy-térből az L_p térbe $p > 2/3$ esetén.*

Definiáljuk a $\sigma^\#$ maximáloperátort $\sigma^\# f(x^1,x^2) = \sup_A |\sigma_{2^A}(f,x^1,x^2)|$ alakban. Itt, a szuprémumot csak speciális indexekre vesszük. A [5] cikkben a Walsh-Kaczmarz-rendszerre a következőt bizonyították:

6. Tétel. *Legyen $p > \frac{1}{2}$. Ekkor a $\sigma^{\kappa,\#}$ maximáloperátor korlátos a H_p Hardy-térből az L_p térbe.*

A $p = 2/3$ pontban a σ^* maximáloperátor és $p = 1/2$ pontban a $\sigma^\#$ maximáloperátor esetén fontos tudni, hogy mi történik.

A [11] cikkben Goginava megmutatta, hogy $\sigma^{\kappa,\#}$ nem korlátos a $H_{1/2}$ Hardy-térből az $L_{1/2}$ térbe. 2013-ban a $\tilde{\sigma}^{\kappa,\#} f := \sup_{A\in\mathbf{P}} \frac{|\sigma^\kappa_{2^A} f|}{\log^2 2^A}$ maximáloperátorra sikerült belátni, hogy korlátos a $H_{1/2}$ Hardy-térből az $L_{1/2}$ térbe [22]. Sőt, azt is, hogy a 2^A-dik Walsh-Kaczmarz-Marcinkiewicz-Fejér-közép deviáns viselkedésének mértéke pontosan $\log^2 2^A$. (Pontosabban, lásd az általánosabb tétel megfogalmazását később,10.-11. Tétel.)

A σ^* maximáloperátor esetén a $p > 2/3$ feltétel lényeges a maximáloperátor korlátosságánál. Ezt mutatja a következő tétel.

7. Tétel. *A σ^* operátor nem korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből az $L_{2/3}$ térbe.*

Ezt a tételt a Walsh-rendszerre Goginava [13], míg a Walsh-Kaczmarz-rendszer esetén Goginava és Nagy [16] látta be. De, ennél erősebb tételt is kimondhatunk.

8. Tétel. *Van olyan $f \in H_{2/3}(G \times G)$ martingál, amelyre*

$$\left\|\sigma^* f\right\|_{L_{2/3}} = +\infty.$$

Ezt a tételt a Walsh-rendszerre Goginava illetve a Walsh-Kaczmarz rendszerre Goginava és Nagy [15] látta be.

A $p = 2/3$ végpontban pozitív eredmény is bizonyítható.

9. Tétel. *A Marcinkiewicz–Fejér-közepek σ^* maximáloperátora korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből a weak-$L_{2/3}$ térbe.*

Ezt a tételt Goginava látta be mind a Walsh-rendszer [10], mind a Walsh-Kaczmarz-rendszer [11] esetén.

A $p = 2/3$ végpontban további vizsgálatok lehetségesek. Az f martingálra tekintsük a

$$\tilde{\sigma}^* f(x^1, x^2) = \sup_{n \in \mathbb{P}} \frac{|\sigma_n(f; x^1, x^2)|}{\log^{3/2}(n+1)}$$

maximáloperátort. Ekkor teljesülnek a következő tételek:

10. Tétel. *A $\tilde{\sigma}^*$ maximáloperátor korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből az $L_{2/3}$ térbe.*

11. Tétel. *Legyen $\varphi : \mathbb{P} \to [1, \infty)$ egy olyan nem csökkenő függvény, amely kielégíti a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^{3/2}(n+1)}{\varphi(n)} = +\infty$$

feltételt. Ekkor a

$$\sup_{n \in \mathbb{P}} \frac{|\sigma_n f|}{\varphi(n)}$$

maximáloperator nem korlátos a $H_{2/3}$ Hardy-térből az $L_{2/3}$ térbe.

Ez a két tétel azt állítja, hogy az n-dik Marcinkiewicz-közép deviáns viselkedésének a pontos mértéke $\log^{3/2}(n+1)$ (a $p = 2/3$ esetben). Ezeket a tételeket e Walsh-rendszerre [23] illetve a Walsh-Kaczmarz-rendszerre a szerző [24] bizonyította a közelmúltban.

Ezt a tételt felhasználva Nagy és Tephnadze [25] belátta a következő eredményt a Walsh-Paley-rendszer esetén. Nevezetesen, szükséges és elégséges feltételt adtak a Walsh-Marcinkiewicz-közepek konvergenciájára a $H_{2/3}\left(G^2\right)$ Hardy-tér folytonossági modulusával.

12. Tétel. *a) Legyen*

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_{2/3}} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),$$

ha $k \to \infty$. Ekkor

$$\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_{H_{2/3}} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

b) Létezik olyan $f \in H_{2/3}$ martingál, amelyre

$$\omega\left(\frac{1}{2^{2^k}}, f\right)_{H_{2/3}} = O\left(\frac{1}{2^{3k/2}}\right),$$

ha $k \to \infty$ és

$$\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_{2/3} \not\to 0 \text{ ha } n \to \infty.$$

Fontos megjegyezni, hogy a Walsh-Kaczmarz-rendszer esetén ezek a tételek még nyitottak.

$p < 2/3$ esetet szintén a szerző és Tephnadze [26] vizsgálta. Legyen az $\widetilde{\sigma}^{*,p}$ maximáloperátor definiálva az

$$\widetilde{\sigma}^{*,p}(f) := \sup_{n\geq 1}\left|\frac{\sigma_n(f)}{n^{2/p-3}}\right|$$

alakban.

13. Tétel. *a) Legyen $0 < p < 2/3$. Ekkor a $\widetilde{\sigma}^{*,p}$ maximáloperátor korlátos a $H_p(G^2)$ Hardy-térből az $L_p(G^2)$ térbe.*

b) Legyen $\varphi : \mathbb{N} \to [1,\infty)$ egy olyan nem csökkenő függvény, amely kielégíti a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/p-3}}{\varphi(n)} = +\infty \tag{1}$$

feltételt. Ekkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_n f}{\varphi(n)}\right\|_{L_{p,\infty}} = \infty$$

teljesül.

Tehát, az n-dik Walsh-Marcikiewicz-közép H_p Hardy-térbeli deviáns viselkedésének a pontos mértékét adták meg. Ezután ezen tétel két alkalmazását bizonyították. Szükséges és elégséges feltételt adtak a Walsh-Marcinkiewicz-közepek konvergenciájára a H_p Hardy-térbeli folytonossági modulus segítségével. Nevezetesen,

14. Tétel. *a) Legyen $1/2 < p < 2/3$, $f \in H_p\left(G^2\right)$ és*

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_p} = o\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right),$$

ha $k \to \infty$. Ekkor

$$\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_{H_p} \to 0, \ ha\ n \to \infty.$$

b) Legyen $0 < p < 2/3$. Van olyan $f \in H_p(G^2)$ martingál, amelyre

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}, f\right)_{H_p} = O\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right)$$

teljesül, ha $k \to \infty$ és

$$\left\|\sigma_n(f) - f\right\|_{weak-L_p} \not\to 0 \ ha\ n \to \infty.$$

Illetve, Nagy and Tephnadze [26] egy erős konvergencia tételt is beláttak a Walsh-Marcinkiewicz-közepekre.

15. Tétel. *a) Legyen $0 < p < 2/3$. Van olyan c_p konstans, hogy*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left\|\sigma_m f\right\|_{H_p}^p}{m^{3-3p}} \leq c_p\left\|f\right\|_{H_p}^p$$

minden $f \in H_p\left(G^2\right)$ esetén.

b) Legyen $0 < p < 2/3$ *és* $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ *egy olyan nem csökkenő függvény, amely kielégíti a* $\Phi(n) \uparrow \infty$ *és*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{k(3-3p)}}{\Phi\left(2^k\right)} = \infty$$

feltételeket. Ekkor van olyan $f \in H_p\left(G^2\right)$ *martingál, amelyre*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left\|\sigma_m f\right\|_{L_{p,\infty}}^p}{\Phi(m)} = \infty.$$

Egy

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(f^{(n)} - f^{(n-1)}\right)$$

martingál esetén legyen a konjugált transzformáltja $\widetilde{f}^{(t)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\left(f^{(n)} - f^{(n-1)}\right)$, ahol $t \in G$ egy rögzített elem. Vegyük észre, hogy $\widetilde{f}^{(0)} = f$. Jól ismert, hogy ha f egy integrálható függvény, akkor az $\widetilde{f}^{(t)}$ konjugált transzformáltja majdnem mindenütt létezik, viszont általában nem integrálható.

A konjugált transzformált (n, m)-dik rectanguláris részletösszegét a szokott módon definiáljuk. A kétdimenziós konjugált Walsh(-Kaczmarz)-Fourier-sor Marcinkiewicz-Fejér-közepe

$$\tilde{\sigma}_n^{(t)}\left(f; x, y\right) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_{k,k}^{(t)}(f; x, y).$$

Egyértelmű, hogy $\tilde{\sigma}_n^{(0)}(f; x, y) = \sigma_n(f; x, y)$.

A következő tételt Weisz látta be a Walsh-rendszer [29, 31] ill. Goginava és Nagy látta be a Walsh-Kaczmarz-rendszer [17] esetén.

16. Tétel. *Legyen* $p > 2/3$. *Ekkor van olyan* $c_p > 0$ *konstans, hogy*

$$\left\|\tilde{\sigma}_n^{(t)} f\right\|_{H_p} \le c_p \left\|f\right\|_{H_p} \quad \left(f \in H_p, t \in G\right).$$

Ezen tételhez kapcsolódóan Goginava belátta a Walsh-rendszerre ill. Goginava és Nagy belátta a Walsh-Kaczmarz-rendszerre [17] a következő állítást.

17. Tétel. *Legyen* $0 < p \le 2/3$. *Ekkor van olyan* $f \in H_p(G \times G)$ *martingál, amelyre*

$$\sup_n \|\tilde{\sigma}_n^{(t)} f\|_p = +\infty, \quad t \in G$$

teljesül.

Következményként adódik, hogy $0 < p \le 2/3$ esetén van olyan $f \in H_p(G \times G)$ martingál, amelyre teljesül, hogy

$$\sup_n \|\sigma_n f\|_p = +\infty.$$

Hivatkozások

[1] G. N. Agajev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarli and A. I. Rubinstein, *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups,* „ELM" (Baku, USSR) (1981) (Russian).

[2] M.I. Dyachenko, *On the (C,α)-summability of multiple trigonometric Fourier series,* Soobshch. Akad. Nauk Gruzii **131,** (1988), 261–263.

[3] G. Gát, *Convergence of Marcinkiewicz means of integrable functions with respect to two-dimensional Vilenkin systems,* Georgian Math. J. **11(3)** (2004), 467-478.

[4] G. Gát, U. Goginava, *Almost everywhere convergence of (C,α)-quadratical partial sums of double Vilenkin-Fourier series,* Georgian Math. J. **13(3),** (2006), 447–462

[5] G. Gát, U. Goginava and K. Nagy, *On (H_{pq}, L_{pq})-type inequality of maximal operator of Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system,* Math. Ineq. Appl. **9(3)** (2006), 473–485.

[6] G. Gát, U. Goginava and K. Nagy, *On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system,* Studia Sci. Math. Hungar. **46(3)** (2009), 399–421.

[7] G. Gát, K. Nagy, On the (C,α)-means of quadratical partial sums of double Walsh-Kaczmarz-Fourier series, Georgian Math. J. **16(3),** (2009), 489–506

[8] U. Goginava, *Pointwise convergence of the Marcinkiewicz means of double Walsh series,* Bull. Georgian Acad. Sci. **161(3),** (2000), 382–384.

[9] U. Goginava, *Almost everywhere summability of multiple Fourier series,* Math. Anal. Appl. **287(1),** (2003), 90–100.

[10] U. Goginava, *The weak type inequality for the maximal operator of the Marcinkiewicz–Fejér means of the two-dimensional Walsh–Fourier series* J. Approx. Theory **154** (2008) 161–180.

[11] U. Goginava, *The weak type inequality for the maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejér means of the two-dimensional Walsh-Kaczmarz system,* Math. Ineq. Appl. **12** (2009), 227–238.

[12] U. Goginava, *Marcinkiewicz-Fejér means of double Vilenkin-Fourier series,* Studia Sci. Math. Hungar. **44(1),** (2007), 97–115.

[13] U. Goginava, *The maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejér means of the d-dimensional Walsh-Fourier series,* East J. Approx. **12(3)** (2006), 295–302.

[14] U. Goginava, *The martingale Hardy type inequality for the Marcinkiewicz-Fejér means of the two-dimensional conjugate Walsh-Fourier series,* Acta Math. Sinica, Engl. Ser. **27(10)** (2011) 1949–1958.

[15] U. Goginava and K. Nagy, *On the maximal operator of the Marcinkiewicz-Fejér means of double Walsh-Kaczmarz-Fourier series,* Publ. Math. Debrecen **75(1-2)** (2009), 95–104.

[16] U. Goginava and K. Nagy, *On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Walsh-Kaczmarz-Fourier series,* Math. Pannonica **19/1** (2008) 49–56.

[17] U. Goginava and K. Nagy, *Marcinkiewicz-Fejér means of double conjugate Walsh-Kaczmarz-Fourier series and Hardy spaces,* Turkish J. Math. **36(2)** (2012) 281–290.

[18] J. Marcinkiewicz, *Sur une methode remarquable de sommation des series doubles de Fourier,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **8** (1939), 149–160.

[19] K. Nagy, *Some convergence properties of the Walsh-Kaczmarz system with respect to the Marcinkiewicz means,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 76 (2005), 503–516.

[20] K. Nagy, *On the L^1 norm of the weighted maximal function of Walsh-Marcinkiewicz kernels,* in Series: International Series of Numerical Mathematics Vol. 161, Inequalities and Applications 2010, Dedicated to the Memory of Wolfgang Walter, (Bandle, C.; Gilányi, A.; Losonczi, L.; Plum, M. Eds.) Springel Basel (2012) 255–268.

[21] K. Nagy, *On the two-dimensional Marcinkiewicz means with respect to Walsh-Kaczmarz system,* J. Approx. Theory **142(2)** (2006) 138–165.

[22] K. Nagy, *On the maximal operator of Marcinkiewicz–Fejér means of the two-dimensional Walsh–Kaczmarz system* Georgian Math. J. **20(2)** (2013) 319–332.

[23] K. Nagy, *On the maximal operator of the Walsh-Marcinkiewicz means,* Publ. Math. Debrecen **78(3-4)** (2011) 633–646.

[24] K. Nagy, *The maximal operator of Marcinkiewicz-Fejér means with respect to Walsh-Kaczmarz-Fourier series* Math. Ineq. Appl. (2012) (submitted).

[25] K. Nagy and G. Tephnadze, *Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space* $H_{2/3}$ Kyoto J. Math. (2013) (to appear).

[26] K. Nagy and G. Tephnadze, *Walsh-Marcinkiewicz means and the Hardy spaces* Central Eur. J. Math. (2013) (submitted).

[27] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis,* Adam Hilger (Bristol-New York 1990).

[28] V. A. Skvortsov, *On Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system,* Anal. Math. **7** (1981), 141–150.

[29] F. Weisz, *Convergence of double Walsh-Fourier series and Hardy spaces,* Appr. Theory Appl. **17** (2001), 32–44.

[30] F. Weisz, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[31] F. Weisz, *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy space,* Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.

[32] L.V. Zhizhiashvili, *Generalization of a theorem of Marcinkiewicz,* Izv. Akad. Nauk USSR Ser Math. **32** (1968), 1112–1122.

Magfüggvények általánosított Vilenkin-rendszereken

Blahota István

Reprezentatív szorzatrendszerek

Legyen $m := (m_0, m_1, \ldots)$ most is 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Jelöljön G_{m_k} egy m_k, $(k \in \mathbb{N})$ rendű véges (nem szükségszerűen kommutatív) csoportot. Legyen a mérték G_{m_k}-n a következő:

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in G_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Legyen G a G_{m_k} halmazok teljes direkt szorzata a topológiák és mértékek μ szorzatával ellátva. Ekkor G teljesen széteső csoport, a szorzatmérték pedig egy egyre normált Haar-mérték lesz.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G-t korlátos csoportnak, egyébként nem-korlátos csoportnak nevezzük.

A G csoport elemeit sorozatokkal reprezentálhatjuk: $x := (x_0, x_1, \ldots)$. A G topologikus tér egy bázisát könnyen megadhatjuk az alábbi módon:

$$I_0(x) := G_m, \quad I_n(x) := \{y \in G_m : y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

minden $x \in G$, $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Ez esetben is az m sorozat által generált általánosított számrendszert használjuk, a szokásos jelölésekkel.

Jelölje Σ_k a G_{m_k} csoport duálisát, azaz G_{m_k} azon folytonos irreducibilis unitér reprezentációit, melyek nem ekvivalensek egymással. Ha $\sigma \in \Sigma_k$, akkor jelölje d_σ a σ reprezentációs terének dimenzióját, valamint legyen $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{d_\sigma}\}$ ennek rögzített, de tetszőleges ortonormált bázisa. A $u_{i,j}^{(\sigma)}(x) := \langle U_x^{(\sigma)} \zeta_i, \zeta_j \rangle$ $(i, j \in \{1, \ldots, d_\sigma\},\ x \in G_{m_k})$ függvényeket az $U^{(\sigma)}$ $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{d_\sigma}\}$ bázisra vonatkozó koordinátafüggvényeinek nevezzük. Minden $\sigma \in \Sigma_k$-hoz d_σ^2 számú koordinátafüggvény tartozik. Az összes koordinátafüggvények száma m_k.

Legyen $\{\varphi_k^s : 0 \leq s < m_k\}$ a G_{m_k} csoport összes normalizált koordinátafüggvényének egy rendszere. Most még nem adjuk meg a φ rendszer sorrendjét, de feltesszük, hogy φ_k^0 mindig az 1 karakter. Így minden $0 \leq s < m_k$ esetén létezik $\sigma \in \Sigma_k$, $(i, j \in$

$\{1,\dots,d_\sigma\}$) úgy, hogy

$$\varphi_k^s(x) = \sqrt{d_\sigma} u_{i,j}^{(\sigma)}(x) \ \ (x \in G_{m_k}).$$

Legyen ψ a φ_k^s függvények szorzatrendszere, nevezetesen

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \ \ (x \in G).$$

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
φ^0	1	1	1	1	1	1
φ^1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^3	1	-1	-1	-1	1	1
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

1. ábra. Az $\mathscr{S}_3$ szimmetrikus csoport egy lehetséges rendszere

Azt mondjuk, hogy ψ a φ reprezentatív szorzatrendszere. A Weyl–Peter-tételből következik, hogy a ψ rendszer ortonormált és teljes $L^2(G)$-n.

Legyen $f : G \to \mathbb{C}$ integrálható függvény. Definiáljuk a Fourier-együtthatókat és -részletösszegeket a szokásos módon:

$$\widehat{f}_k := \int_G f(x)\bar{\psi}_k(x) d\mu(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k(x) \quad (n \in \mathbb{P}).$$

A Dirichlet-féle magfüggvényeket most így definiáljuk ($n \in \mathbb{P},\ D_0 :\equiv 0$):

$$D_n(y,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(y)\bar{\psi}_k(x).$$

A reprezentatív szorzatrendszerek a Walsh–Paley- és a Vilenkin-rendszerek egyfajta általánosításainak tekinthetőek.

Vegyük észre azonban, hogy a fenti magfüggvény-definíció nem teljesen analóg a korábban tárgyalt rendszerekével, melyek esetén a Dirichlet-féle magfüggvény egyváltozós volt. Ha a speciálisabb rendszert ϑ-val jelöljük, az „egyirányú" kapcsolat a két koncepció között a következő: $D_n^{\vartheta}(y-x) = D_n(y,x)$.

Könnyű látni, hogy ez esetben

$$S_n f(x) = \int_G f(y) D_n(x,y) d\mu(y).$$

A reprezentatív szorzatrendszeret, mint a Fourier analízis új eszközeit Gát és Toledo [6] vezette be.

Vilenkin-szerű rendszerek

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ ez esetben is 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Legyen G_{m_k} egy m_k $(k \in \mathbb{N})$ elemszámú halmaz. Definiáljunk egy mértéket a G_{m_k} halmazokon a következőképpen:

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in G_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Legyen G_m a G_{m_k} halmazok teljes direkt szorzata (bármiféle művelet nélkül), szorzattopológiával és μ-vel jelölt szorzatmértékkel ellátva). Akárcsak a korábban bevezetett hasonló definíciók esetén, az így keletkezett szorzatmérték is egy egyre normált Haar-mérték lesz G_m-en. Ha az m korlátos, akkor G_m-et korlátos, egyébként pedig nemkorlátos Vilenkin-térnek nevezzük. A Vilenkin-csoporthoz hasonlóan G_m Vilenkin-tér elemeit is sorozatokkal reprezentálhatjuk: $x := (x_0, x_1, \dots)$ $(x_k \in G_{m_k})$, illetve az alábbi intervallumok itt is a megfelelő topologikus tér egy bázisát alkotják:

$$I_0(x) := G_m, \quad I_n(x) := \{y \in G_m : y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

minden $x \in G_m$, $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Jelölje $L^p(G_m)$ a Lebesgue-tereket ($\|\cdot\|_p$ a megfelelő normák) $(1 \le p \le \infty)$, $\mathcal{F}_n$ az $I_n(x) (x \in G_m,\ n \in \mathbb{N})$ halmazok által generált σ algebrát, valamint E_n a $\mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N})$ σ algebrára vonatkozó feltételes várható érték operátort.

Most bevezetünk egy Gát [5] által definiált, Vilenkin-szerűnek nevezett rendszert G_m-en.

Az $r_k^n : G_m \to \mathbb{C}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ függvényeket általánosított Rademacher-függvényeknek nevezzük a G_m Vilenkin-téren, ha rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

i. Az r_k^n $(k, n \in \mathbb{N})$ függvény $\mathcal{F}_{k+1}$ mérhető (vagyis $r_k^n(x)$ csak $x_0, \dots, x_k$-től függ és $r_k^0 = 1$.

ii. Ha M_k osztója n-nek és l-nek, valamint $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ $(k,l,n \in \mathbb{N})$, akkor

$$E_k(r_k^n \bar{r}_k^l) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n_k = l_k, \\ 0 & \text{, ha } n_k \neq l_k. \end{cases}$$

iii. Ha M_k osztója n-nek (vagyis $n = n_k M_k + n_{k+1} M_{k+1} + \cdots + n_{|n|} M_{|n|}$), akkor

$$\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r_k^n(x)|^2 = m_k$$

minden $x \in G_m$ esetén.

iv. Létezik $\delta > 1$, melyre $\|r_k^n\|_\infty \leq \sqrt{m_k/\delta}$ minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén.

Definiáljuk a $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ Vilenkin-szerű rendszert a következőképpen

$$\psi_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n^{(k)}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Gát [5] igazolta, hogy a ψ Vilenkin-szerű rendszer ortonormált.

Végül vezessük be a Dirichlet- és Fejér-féle magfüggvényeket ($n \in \mathbb{P}$, $D_0 :\equiv K_0 :\equiv 0$):

$$D_n(y,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(y)\bar{\psi}_k(x),$$

$$K_n(y,x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(y,x).$$

Lássunk néhány ismert példát Vilenkin-szerű rendszerre.

1. A Walsh–Paley- és Vilenkin-rendszerek (lásd például Schipp, Wade, Simon és Pál [9], valamint Vilenkin [12] könyvét).

2. A 2-adikus és annak általánosítása, az m-adikus egészek karakterrendszere (lásd például Schipp és Wade [8], valamint Taibleson [11] könyvét).

3. A Gát és Toledo által bevezetett nemkommutatív Vilenkin-csoportok unitér irreducibilis reprezentációi koordinátafüggvényeinek szorzatrendszere (röviden: reprezentatív szorzatrendszer, lásd például Gát és Toledo [6] cikkét).

4. A Gát által Vilenkin-csoportokon bevezetett $\psi\alpha$-rendszer. Egy speciális esete új eszköznek bizonyult limit periodikus és majdnem páros számelméleti függvények vizsgálatában (lásd például Gát [4] és Blahota [1] cikkét, valamint Mauclaire [7] könyvét).

5. A Schipp által Walsh–Paley-csoporton bevezetett UDMD szorzatrendszer (lásd például Schipp és Wade [8] cikkét).

Annak bizonyításai, hogy a fent említett rendszerek valóban a Vilenkin-szerű rendszer speciális esetei, Gát [5] cikkében találhatóak.

Magfüggvények maximál értéke

Jelölje G_m a Vilenkin-teret. Definiáljuk a Dirichlet-, illetve a Fejér-féle magfüggvények maximál érték sorozatát:

$$\mathcal{D}_n := \sup_{x,y\in G_m} |D_n(y,x)| \quad (n\in\mathbb{N}),$$

$$\mathcal{K}_n := \sup_{x,y\in G_m} |K_n(y,x)| \quad (n\in\mathbb{P}).$$

1. Lemma (Blahota [2]). *Ha $R = D$ akkor legyen $n \in \mathbb{N}$, ha $R = K$ akkor legyen $n\in\mathbb{P}$. Ezzel a jelöléssel*

$$\mathcal{R}_n = \sup_{x\in G_m} R_n(x,x).$$

Toledo [10] ezzel analóg állítást igazolt reprezentatív szorzatrendszerekre, bár ő cikkében kizárólag a Dirichlet-féle magfüggvényekkel foglalkozott.

A Paley-lemmát felhasználva kapjuk az alábbi állítást.

1. Corollary (Blahota [2]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

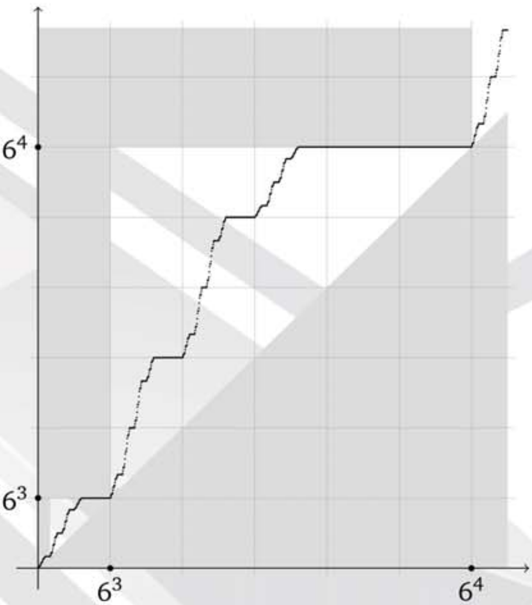
$$\mathcal{D}_{M_n} = M_n.$$

Az eredeti (kommutatív Vilenkin-csoportból származó) Vilenkin-rendszer esetén (és így természetesen a Walsh–Paley-rendszer esetén is) $\mathcal{D}_n = n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, hiszen Vilenkin-rendszeren $n = D_n(0) \geq |D_n(x)|$ teljesül minden $x \in G_m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ahogy azt látni fogjuk, a helyzet az általánosabb Vilenkin-tereken, például reprezentatív szorzatrendszerek esetén is különbözik ettől.

1. Tétel (Blahota [2]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$n \leq \mathcal{D}_n \leq M_{|n|+1}.$$

Az 1. ábra az $\mathscr{S}_3$ szimmetrikus csoporton értelmezett egyik lehetséges rendszer értékeit mutatja (további részletekért lásd Toledo [10] cikkét). Az ebből a konkrét rendszerből származó $\mathcal{D}_n$ sorozat a 2. ábrán látható, a megfelelő $\mathcal{K}_n$ sorozat pedig a 3. ábrán. Ez a nemkommutatív rendszer jó példa az alfejezetben szereplő tételek nemtriviális (vagyis az eredeti Vilenkin-rendszer esetén tapasztaltaktól eltérő) eseteire.



2. ábra. $n \le D_n \le 6^{|n|+1}$ az $\mathscr{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatán.

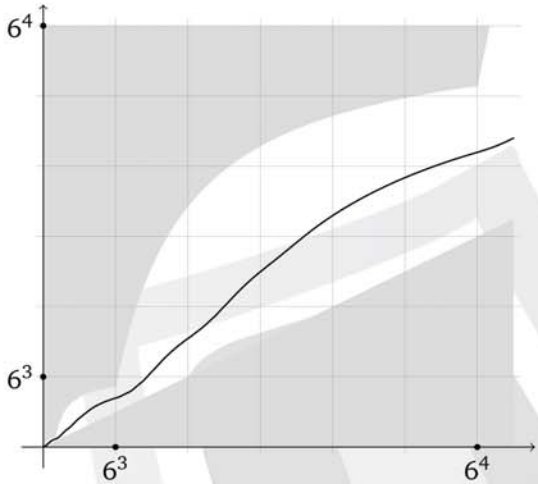
2. Corollary (Blahota [2]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$1 \le \frac{D_n}{n} \le m_{|n|}.$$

Ahogy arról már volt szó korábban, Vilenkin-rendszeren $n = D_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, ahonnan ugyancsak minden $n \in \mathbb{N}$-re $\frac{n-1}{2} = K_n$ is teljesülni fog. Egyéb eseteket itt is általánosabb rendszeren fogunk kapni.

2. Tétel (Blahota [2]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$\frac{n-1}{2} \le K_n \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M_{|k|+1}.$$



3. ábra. $\frac{n-1}{2} \le K_n \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 6^{|k|+1}$ az $\mathscr{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatán.

3. Corollary (Blahota [2]). *Legyen* $1 < n \in \mathbb{P}$. *Ekkor*

$$1 \le \frac{2}{n-1} K_n \le \max_{1 \le k < n} m_{|k|}.$$

3. Tétel (Blahota [2]). *Legyen* $n \in \mathbb{P}$. *A* $D_k = k$ *egyenlőség pontosan akkor áll fenn minden* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *esetén, ha*

$$K_n = \frac{n-1}{2}.$$

4. Tétel (Blahota [2]). *A* D_n *sorozat monoton növekvő, a* K_n *sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Könnyű látni, hogy ha $\inf_{x \in G_m} |\psi_n(x)| > 0$, akkor $D_n < D_{n+1}$. Ez a feltétel fennáll a legtöbb „klasszikus" esetben (például a Walsh–Paley-, eredeti Vilenkin-, valamint a $\psi\alpha$-rendszer esetén is), de könnyen találunk olyan reprezentatív szorzatrendszert, melyben $D_n = D_{n+1}$ bizonyos $n \in \mathbb{N}$-re (lásd a 2. ábrát, vagy Toledo [10] cikkét).

A továbbiakban speciális reprezentatív szorzatrendszerekkel fogunk foglalkozni, nevezetesen azzal az esettel, amikor a rendszer azonos csoportok teljes direkt szorzatán értelmezett, ráadásul az általánosított Rademacher-függvények is ugyanazok rajtuk. Ez esetben vegyük közelebbről szemügyre a Dirichlet-féle magfüggvények maximál érték sorozatát.

2. Lemma (Blahota [3]). *Legyen $x \in I_{|n|+1}(y) \setminus I_{|n|+2}(y)$, ahol $x, y \in G_m$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $\breve{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ tetszőleges $z \in G_m$-re. Ha $m_k = p$ és $\varphi_k^s(x) = \varphi^s(x)$ minden $x \in G_m$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ esetén, ahol $2 \leq p \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor*

$$D_{pn}(y, x) = pD_n(\breve{y}, \breve{x}).$$

4. Corollary (Blahota [3]). *Ha $m_k = p$ és $\varphi_k^s(x) = \varphi^s(x)$ minden $x \in G_m$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ esetén, ahol $2 \leq p \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor*

$$D_{pn} = pD_n.$$

Ez a 4. Következmény magyarázatot ad D_n gráfjának fraktál-szerű, önhasonló struktúrájára, melyet $\mathscr{S}_3$ és más, például $\mathscr{Q}_2$ vagy $\mathscr{U}_4$ nemkommutatív csoportok reguláris rendezése által generált rendszerek esetén tapasztalhatunk (lásd a 2. ábrát és Toledo [10] cikkét).

Másrészt a 4. Következmény segíthet minket D_n pontosabb becslésében. A 2. Következményből már kaptunk ugyanis egy durva becslést, miszerint (a 4. Következmény jelölését használva) $\frac{D_n}{n} \leq p$. Ám, ha teljesülnek a 4. Következmény feltételei, sokkal jobb becslést kaphatunk.

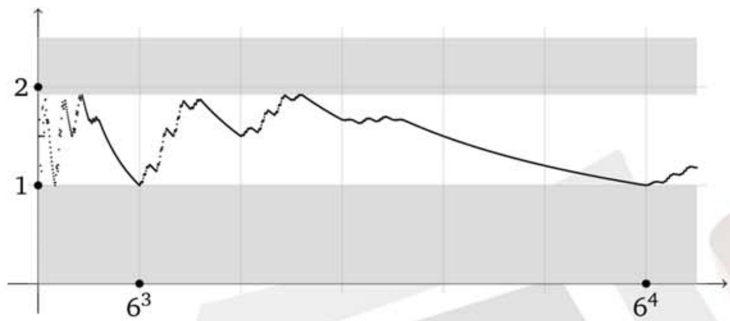
Az alfejezet fő eredménye a következő:

5. Tétel (Blahota [3]). *Ha $m_k = p$ és $\varphi_k^s(x) = \varphi^s(x)$ minden $x \in G_m$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ esetén, ahol $2 \leq p \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor*

$$\frac{D_n}{n} < e^{\frac{1}{(p-1)p^{r-1}}} \max_{k \in \{1, \ldots, p^r\}} \frac{D_k}{k}$$

minden $r, n \in \mathbb{P}$ esetén, ahol e az Euler-féle szám.

Mivel $\lim_{r \to \infty} e^{\frac{1}{(p-1)p^{r-1}}} = 1$, az 5. Tételt használva a $\frac{D_n}{n}$ (nem konvergens) sorozat megfelelőlen kiválasztott, de véges számú tagjának segítségével tetszőleges pontosságú becslést adhatunk a sorozat szuprémumára. Erre látunk egy példát a továbbiakban. Vizsgáljunk ehhez egy konkrét rendszert. Nevezetesen, tekintsük az $\mathscr{S}_3$-ak, vagyis a hat elemű szimmetrikus csoportok teljes direkt szorzatát. (Az itt bemutatásra kerülő becslési módszer természetesen más, az 5. Tétel feltételeinek megfelelő rendszer esetén is jól használható.) Ez esetben nyilván $m_k = 6$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Az $\mathscr{S}_3$ csoportnak két karaktere és egy kétdimenziós reprezentációja van. A φ rendszer értékeit



4. ábra. $1 \le \frac{D_n}{n} < 1.92309$ az $\mathscr{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatán.

a választott bázistól függő kétdimenziós reprezentációból kapjuk. Az 1. ábrán egy lehetséges φ rendszer értékeit láthatjuk (a részletekért és további példákért lásd Toledo [10] cikkét). A D_n egy részét a 2. ábrán láthatjuk.

5. Corollary (Blahota [3]). *Legyen az $\mathscr{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatához választott rendszer az 1. ábrán definiált. Ez esetben*

$$\frac{D_n}{n} < 2,04$$

minden $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Ebben a konkrét esetben ezzel a $2,04$-gyel lényegesen jobb becslést kaptunk, mint a 2. Következmény által garantált 6, pedig r-et még csak 1-nek választottuk. Ez esetben a számoláshoz legfeljebb egy zsebszámológépet kell igénybevennünk. A pontosabb becslés eléréséhez növeljük r értékét. Lássuk most ugyanezt a szituációt $r = 6$-tal:

6. Corollary (Blahota [3]). *Legyen az $\mathscr{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatához választott rendszer az 1. ábrán definiált. Ez esetben*

$$1,92303 < \sup_{n \in \mathbb{P}} \frac{D_n}{n} < 1,92309.$$

Hivatkozások

[1] Blahota, I., *Example for an almost even arithmetical function, the Vilenkin–Fourier series of which diverges everywhere*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 13/D, 1992, 41-45.

[2] Blahota, I., *On the maximal value of Dirichlet and Fejér kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80/3-4, 2012, 503-513.

[3] Blahota, I., *On the Dirichlet kernels with respect to some special representative product systems*, benyújtva

[4] Gát, G., *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arithmetica, 49/2, 1991, 105-123.

[5] Gát, G., *On* $(C,1)$ *summability for Vilenkin-like systems*, Studia Mathematica, 144/2, 2001, 101-120.

[6] Gát, G., Toledo, R., L^p*-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Mathematica, 22, 1996, 13-24.

[7] Mauclaire, J., L., *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris, 1986.

[8] Schipp, F., Wade W. R., *Transforms on normed fields*, Leaflets in Mathematics, Pécs, 1995, 1-175.

[9] Schipp, F., Wade, W. R., Simon, P., Pál, J., *Walsh series. An Introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.

[10] Toledo, R., *On the maximal value of Dirichlet kernels with respect to representative product systems*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 82/II, 2010, 431-447.

[11] Taibleson, M. H., *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1975, 1-306.

[12] Vilenkin, N. Ya., *A class of complete orthonormal systems*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 11, 1947, 363-400.

Reprezentatív szorzatrendszerek

Toledo Rodolfo

A Fourier analízis egy modern megközelítése az, amikor az ortonormált rendszereket lokálisan kompakt csoportokon értelmezzük, ezért a Walsh-sorok tanulmányozását érdemes úgy végezni, hogy a Walsh-függvényeket a diadikus csoport karaktereinek tekintjük. Ez a csoport a legegyszerűbb, de nem triviális modell a véges csoportok teljes direkt szorzatára. Gyakran a Walsh-függvényeknél a Paley-féle rendezést alkalmazzuk, ahogy előállnak Rademacher-függvények véges szorzataként. Ezt nevezzük Walsh-Paley-rendszernek.

A fenti struktúrát 1947-ben Vilenkin általánosította, aki tanulmányozta a tetszőleges ciklikus csoportok teljes direkt szorzatát. A Vilenkin-rendszer felépítése is olyan, hiszen itt ciklikus csoportok karaktereinek véges szorzatával foglalkozunk, Paley-hez hasonlóan.

Gát György és Toledo Rodolfo [2] általánosították a Vilenkin-rendszereket. Az alapvető ötlet az, hogy tetszőleges véges csoportok teljes direkt szorzatát vesszük akkor is, ha nem Abel csoportokról van szó és a harmonikus analízis által javasolt felépítés szerint kapjuk meg a megfelelő ortonormált rendszert. A következőekben részletesen megmutatjuk ezeket a struktúrákat.

Jelölje $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ és $\mathbf{C}$ a nem negatív, pozitív egészek és a komplex számok halmazát. Legyen $m := (m_k,\ k \in \mathbf{N})$ pozitív számok olyan sorozata, hogy $m_k \geq 2$ és G_k legyen egy m_k rendű csoport ($k \in \mathbf{N}$). Tegyük fel, hogy minden csoport diszkrét topológiával és egyre normált Haar mértékkel rendelkezik. Legyen G a G_k csoportok teljes direkt szorzata szorzattopológiával, -művelettel és -mértékkel (μ):

$$G := \mathop{\times}_{k=0}^{\infty} G_k. \tag{1}$$

Ekkor G egy kompakt teljesen széteső csoport egyre normált μ Haar mértékkel és minden $x \in G$ nem más, mint egy $x := (x_0, x_1, \ldots)$ sorozat, ahol $x_k \in G_k$, ($k \in \mathbf{N}$). Ezt hívjuk az x *kiterjedésének*. A rövidség kedvéért mindenütt a csoportműveleteket szorzatjellel, az egységelemeket e-vel fogjuk jelölni.

Azt mondjuk, hogy G egy *korlátos csoport*, ha $m = (m_k,\ k \in \mathbf{N})$ egy korlátos sorozat.

Másrészről, az $m = (m_k,\ k \in \mathbf{N})$ sorozattal bevezetjük a következő jelölést:

$$M_0 := 1, \quad \text{és} \quad M_{k+1} := m_k M_k,$$

ahol $k \in \mathbf{N}$. Könnyű igazolni, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ egyértelműen felírható

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k,$$

módon, ahol $0 \le n_k < m_k$ és $n_k \in \mathbf{N}$. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy az $(n_0, n_1, \ldots)$ sorozatot az n *kiterjedésének* nevezzük az m sorozatra vonatkozóan. Gyakran a következő jelölést alkalmazzuk:

$$|n| := \max\{k \in \mathbf{N} : n_k \neq 0\}.$$

Az ortonormált rendszerek megadásához a [4]-ben szereplő jelölést fogjuk alkalmazni. Először a véges G_k csoportokkal foglalkozunk és ezeken értelmezett teljes ortonormált rendszereket adunk meg. Jelölje Σ_k a véges G_k $(k \in \mathbf{N})$ csoportok duál objektumát. Ekkor minden $\sigma \in \Sigma_k$ nem más, mint folytonos irreducibilis unitér reprezentációk osztálya, melynek elemei ekvivalensek egy rögzített $U^{(\sigma)}$ reprezentációval. Legyen d_σ az $U^{(\sigma)}$ reprezentációs terének dimenziója és rögzítsünk egy tetszőleges $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{d_\sigma}\}$ ortonormált bázist ezen a reprezentációs téren. Minden $i, j \in \{1, \ldots, d_\sigma\}$ és $x \in G_k$ esetén az

$$u_{i,j}^{(\sigma)}(x) := \langle U_x^{(\sigma)} \zeta_i, \zeta_j \rangle$$

függvényeket *koordinátafüggvényeknek* nevezzük az $U^{(\sigma)}$ reprezentációra és $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{d_\sigma}\}$ bázisra nézve. Így minden $\sigma \in \Sigma_k$ esetén d_σ^2 darab koordinátafüggvényt kapunk, összesen m_k darabot a G_k egész duál objektumra. Ezeknek a függvényeknek L^2-beli normája $1/\sqrt{d_\sigma}$-vel egyenlő.

Legyen $\{\varphi_k^s : 0 \le s < m_k\}$ a G_k csoport *normált koordinátafüggvények* egy rendszere. Előre nem adunk meg konkrét rendezést rajta, csak azt tételezzük fel, hogy $\varphi_k^0 = 1$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor minden $0 \le s < m_k$ esetén van olyan $\sigma \in \Sigma_k$ és $i, j \in \{1, \ldots, d_\sigma\}$, hogy

$$\varphi_k^s(x) = \sqrt{d_\sigma}\, u_{i,j}^{(\sigma)}(x) \qquad (x \in G_k).$$

A G csoporton értelmezett ψ ortonormált rendszer legyen a φ_k^s függvények szorzatrendszere, azaz

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \qquad (x \in G),$$

ahol $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Ekkor azt mondjuk, hogy ψ a φ *reprezentatív szorzatrendszere*. A Weyl-Peter tétel szerint (lásd [4]) ψ egy teljes ortonormált rendszer $L^2(G)$-ben.

Példák

A G kompakt topologikus csoport karakterei azok a G csoporton értelmezett komplex értékű folytonos φ függvények, amelyekre teljesül

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (x, y \in G)$$

és

$$|\varphi(x)| = 1 \qquad (x \in G).$$

Legyen $G_k = Z_2$ a másodrendű ciklikus csoport minden $k \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor Z_2 teljes direkt szorzatát *diadikus csoportnak*, a Rademacher függvények

$$\varphi^s(x) = (-1)^{sx} \quad (s \in \{0,1\},\ x \in Z_2)$$

szorzatrendszerét *Walsh-Paley-rendszernek* nevezzük. Hasonlóan, ha m_k egynél nagyobb egész számok sorozata és $G_k = Z_k$ az m_k-rendű ciklikus csoport minden $k \in \mathbf{N}$ esetén, akkor Z_k teljes direkt szorzatát *Vilenkin csoportnak*, az általánosított Rademacher függvények

$$\varphi_k^s(x) = \exp(2\pi\imath s x/m_k)$$

$(s \in \{0, \dots m_k - 1\},\ x \in Z_{m_k},\ \imath^2 = -1)$ szorzatrendszerét *Vilenkin-rendszernek* nevezzük.

Másrészről, minden nem Abel csoportnak vannak karakterei, legalább a triviális $\varphi \equiv 1$ karakter. Minden 1 dimenziójú folytonos unitér reprezentáció karakter és az Abel csoportoknak csak karakterei vannak. Ezenkívül minden nem Abel csoportnak van olyan reprezentációja, amely nem karakter.

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)	$\|\varphi^s\|_1$	$\|\varphi^s\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt{2}$
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

1. táblázat. A φ rendszer S_3 esetén.

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	$\\|\varphi^s\\|_1$	$\\|\varphi^s\\|_\infty$
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
φ^2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
φ^3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
φ^4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^5	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^6	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
φ^7	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\imath$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\imath$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

2. táblázat. A φ rendszer Q_2 esetén.

Például, vegyük 3 elem szimmetria csoportját, melyet S_3-mal jelöljük. Ennek a csoportnak két karaktere és egy 2 dimenziós reprezentációja van. A φ rendszer értékei a 2 dimenziós reprezentációra vonatkozóan a kiválasztott bázistól függnek. Az 1. táblázat tartalmazza egy ilyen lehetséges φ rendszer értékeit. Vegyük észre, hogy a φ^s függvényei felvehetik a nulla értéket és

$$\max_{0\le s<6} \|\varphi^s\|_1 \|\varphi^s\|_\infty = \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Néhány esetben a φ^s függvényeinek abszolút értéke csak 0 vagy a megfelelő dimenzió négyzetgyöke lehet. Az ilyen reprezentációkat *monomiális reprezentációknak* nevezzük. Egy reprezentatív szorzatrendszert, amely monomiális reprezentációkból áll, *monomiális reprezentatív szorzatrendszernek* nevezzük. A legegyszerűbb példát monomiális reprezentációkról a Q_2 csoporton kapjuk, amely a 8-ad rendű kvaternió csoport, azaz

$$\{[a,b] : a^4 = e,\ b^2 = a^2,\ bab^{-1} = a^3\}.$$

Ebben az esetben a φ rendszer értékei a 2. táblázatban találhatók meg. Vegyük észre, hogy

$$\max_{0\le s<8} \|\varphi^s\|_1 \|\varphi^s\|_\infty = 1. \tag{3}$$

Kapcsolat a $[0,1[$ intervallummal

[5]-ben Toledo Rodolfo egy természetes kapcsolatot adott a véges csoportok tejes direkt szorzatán értelmezett Haar integrál és a $[0,1[$ intervallumon értelmezett Lebesgue integrál között. Ezen a kapcsolaton keresztül több lokálisan konstans ortonormált rendszert értelmezzünk a $[0,1[$ intervallumon.

A G topologikus csoport (lásd (1)) metrizálható. Egy lehetséges metrikát a következő módon adunk meg. Rendezzük a G_k csoportok elemeit olyan módon, hogy az elejére az egység elem kerüljön. Valóban, a rendezés egy bijekció G_k és a $\{0,1,\dots,m_k-1\}$ halmaz között, mely minden $x \in G_k$ elemhez egy $0 \le \overline{x} < m_k$ egész számot rendel ($\overline{e} = 0$). Legyen

$$|x| := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (x \in G).$$

Könnyű igazolni, hogy $|.|$ egy norma és a belőle származó $d(x,y) := |xy^{-1}|$ metrika indukálja a G topológiáját. Továbbá, $0 \le |x| \le 1$ minden $x \in G$ esetén. Ezzel a G csoport reprezentálható a $[0,1[$ intervallumon.

Minden $x \in [0,1]$ felírható

$$x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{x_k}}{M_{k+1}} \qquad (0 \le \overline{x_k} \le m_k - 1),$$

de vannak olyan számok, melyek kétféleképpen állíthatók elő az előző módon. Ezek a

$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{p}{M_n} : 0 \le p < M_n,\ n,p \in \mathbf{N} \right\}$$

halmaz elemei, amelyeket *m-adikus racionális számoknak* hívunk (vegyük észre, hogy 1 nem m-adikus racionális szám). A többi számnak csak egyetlen előállítása van. Az m-adikus racionális számoknak egyik előállítása 0-val, a másik $m_k - 1$-gyel végződik. Ekkor az elsőt választjuk és így minden $[0,1[$-beli számhoz egyértelműen megadhatjuk az előállítását, amelyet az *m-adikus kiterjedésének* nevezünk.

Hasonlóan, minden $[0,1[$-beli elemhez, amely m-adikus kiterjedése az $\overline{x_0}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$,… elemekkel történik, egyértelműen hozzárendelhetjük a G csoportnak azt az elemét, melynek kiterjedése éppen $(x_0, x_1, \dots)$. Ezt a leképezést Fine-leképezésnek hívjuk és ρ-val jelöljük.

Egy *m-adikus intervallum* mindig az

$$I(n,p) := \left[\frac{p}{M_n}, \frac{p+1}{M_n} \right[$$

típusú intervallumot jelenti ($0 \le p < M_n,\ n,p \in \mathbf{N}$). Az *m-adikus topológia* az, amelyet az m-adikus intervallumok indukálnak a $[0,1[$-en. Ez a topológia teljesen széteső, hiszem az m-adikus intervallumok egy egyszerre nyílt és zárt halmazokból álló megszámlálható bázist alkotnak. Az m-adikus topológiát a következő metrika indukálja:

$$d(x,y) := |\rho(x)\rho(y)^{-1}|,$$

ahol $x, y \in [0,1[$. A Fine-leképezés egy természetes kapcsolatot ad a $[0,1[$ új struktúrája és a G topologikus csoport között.

Legen $L^0(G)$ a G csoporton értelmezett m.m. véges mérhető függvények halmaza. Ugyanígy legyen L^0 a $[0,1[$ csoporton értelmezett m.m. véges mérhető függvények halmaza a Lebesgue mérték szerint. A következő tétel megadja a kapcsolatot a G csoporton értelmezett Haar integrál és a $[0,1[$ intervallumon értelmezett Lebesgue integrál között.

1. Tétel. *Legyen ρ a Fine-leképezés.*

(a) Ha $f \in L^0(G)$, akkor $f \circ \rho \in L^0$. Fordítva, ha $g \in L^0$ és

$$(4) \quad f(x) := g(|x|) \qquad (x \in G),$$

akkor $f \in L^0(G)$.

(b) Ha f integrálható G-n, akkor $f \circ \rho$ Lebesgue integrálható és

$$\int_G f\,d\mu = \int_0^1 (f \circ \rho)(x)\,dx.$$

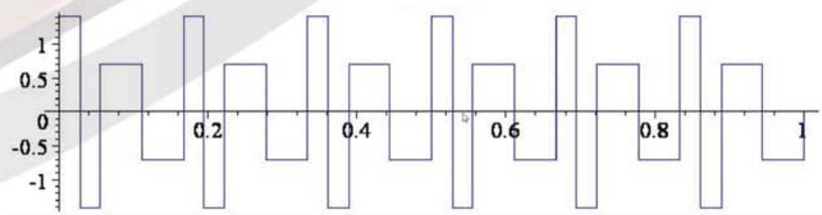
Fordítva, ha g Lebesgue integrálható és f-et a (4) szerint értelmezzük, akkor f integrálható G-n és

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_G f\,d\mu.$$

Végül, a ψ rendszer reprezentálható a $[0,1[$ intervallumon a

$$\upsilon_n := \psi_n \circ \rho \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rendszerrel, az 1. tétel szerint.



5. ábra. υ_{12} az S_3 teljes direkt szorzata esetén az 1. táblázat szerint

Dirichlet-magok

Minden G-n értelmezett integrálható komplex függvény esetén értelmezzük a *Fourier-együtthatókat* és a *Fourier-sor részletösszegét* a következő módon

$$\widehat{f}_k := \int_{G_m} f\overline{\psi}_k \, d\mu$$

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k,$$

ahol $k, n \in \mathbf{N}$. A *Dirichlet-magok*:

$$D_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\overline{\psi}_k(y) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Könnyű belátni, hogy

$$S_n f(x) = \int_G f(y) D_n(x,y) d\mu(y),$$

amely megmutatja a Dirichlet-magok fontosságát a Fourier-sorok konvergenciájának tanulmányozásában.

Legyen $I_0(x) := G$,

$$I_n(x) := \{y \in G : y_k = x_k,\ 0 \le k < n\},$$

ahol $x \in G$, $n \in \mathbf{P}$. Azt mondjuk, hogy minden $I_n(x)$ halmaz egy *intervallum*. Az $I_n(e)$ intervallumok halmaza az egységelem egy megszámlálható környezetbázisát alkotja a G szorzattopológián.

A következő lemmát úgy ismerik, mint Paley-lemma a Walsh-Paley-rendszer esetén, de tetszőleges Vilenkin-rendszerre is igaz. [2]-ben a szerzők igazolták azt az állítást, hogy a Paley-lemma kiterjeszthető tetszőleges reprezentatív szorzatrendszer esetére is.

1. Lemma (Paley-lemma). *Ha $n \in \mathbf{N}$ és $x, y \in G$, akkor*

$$D_{M_k}(x,y) = \begin{cases} M_k, & \text{for } x \in I_k(y), \\ 0, & \text{for } x \notin I_k(y). \end{cases}$$

A Paley-lemmából következik, hogy az S_{M_n} operátorok az E_n feltételes várhatóérték arra a σ-algebrára vonatkozóan, amelyet az $I_n(x)$, $x \in G$ halmazok generálnak. Valóban

$$S_{M_n} f(x) = \frac{1}{\mu(I_n(x))} \int_{I_n(x)} f \, d\mu.$$

Ekkor a martingál-konvergenciatétel szerint az $S_{M_n} f$ Fourier-sor részletösszege f-hez konvergál L^p-normában és m.m. minden $f \in L^p(G)$, $p \ge 1$ esetén. A Paley-lemma másik következménye, hogy a ψ_n függvények komplex lineáris kombinációi és az intervallumokon értelmezett karakterisztikus függvények komplex lineáris kombinációi megegyeznek. Ezért a ψ rendszer szintén teljes $L^1(G)$-ben.

A Dirichlet-magok tulajdonságai nagyon eltérőek lehetnek attól függően, hogy G Abel csoport vagy sem. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, tanulmányozni fogjuk a Dirichlet-magok legnagyobb értékeit (lásd [6]), amelyeket a következő módon értelmezünk:

$$D_n := \sup_{x,y\in G} |D_n(x,y)| \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

Abel csoportok esetén $D_n = n$ $(n \in \mathbf{P})$, de az általános eset merőben más.

2. Tétel. *Minden $n \in \mathbf{P}$ esetén*

$$n \le D_n \le M_{|n|+1}.$$

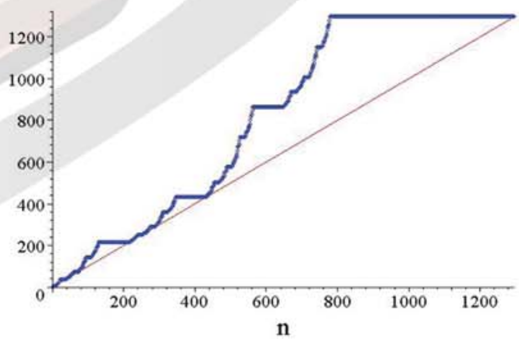
A 6. ábra megmutatja a 2. tétel állítását az S_3 teljes direkt szorzata esetén az 1. táblázat szerint.

[6]-ban a szerző szintén foglalkozott a $\frac{D_n}{n}$ hányadosokkal, melyek fontosak a Dirichlet-magok becslésének megkeresésében. Ezek a hányadosok eggyel egyenlőek kommutatív esetben, de korlátlanok lehetnek más esetekben. A $\frac{D_n}{n}$ hányadosok korlátossága függ a véges csoportokon értelmezett hasonló hányadosok korlátosságától.

3. Tétel. *Legyen G a véges G_k csoportok teljes direkt szorzata. A $\dfrac{D_n}{n}$ hányadosok korlátosak minden $n \in \mathbf{P}$ esetén akkor és csak akkor, ha a hányadosok*

$$\frac{\sum_{s=0}^{r-1} |\varphi_k^s(x_k)|^2}{r} \tag{5}$$

egyenletesen korlátosak minden $k \in \mathbf{N}$, $0 < r \le m_k$ és $x_k \in G_k$ esetén.



6. ábra. A D_n értékei az S_3 teljes direkt szorzata esetén az 1. táblázat szerint.

Fourier-sorok konvergenciája

Ebben a részben a Fourier-sorok részletösszegei L^p-normában való konvergenciájával foglalkozunk reprezentatív szorzatrendszerekre vonatkozóan.

Minden $1 \leq p < \infty$ esetén legyen $L^p(G)$ azok a G-n értelmezett, mérhető, komplex f függvények halmaza, amelyekre teljesül

$$\|f\|_p := \int_G |f|^p d\mu < \infty.$$

A főkérdés az, hogy melyek azok a p értékek, amelyekre minden $L^p(G)$-beli f függvény esetén az $S_n f$ részletösszeg az f függvényhez konvergál L^p-normában, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_p = 0.$$

$p = 2$ esetén a válasz mindig igaz, hiszen $L^2(G)$ Hilbert tér, de $p = 1$-re a válasz az, hogy nem igaz az állítás (lásd [7]).

4. Tétel. *Minden G csoport esetén van olyan $f \in L^1(G)$ függvény, hogy $S_n f$ nem konvergál f-hez L^1-normában.*

A főkérdésünket egymástól függetlenül Wo-Sang Young, Schipp Ferenc és Simon Péter vizsgálta tetszőleges Vilenkin-rendszerre és pozitív eredményt érték el $1 < p < \infty$ esetén.

5. Tétel (Simon, Schipp és Young)**.** *Ha G egy Vilenkin-csoport és $1 < p < \infty$, akkor $S_n f$ az f-hez konvergál L^p-normában minden $f \in L^p(G)$ esetén.*

Az előző tétel nem igaz tetszőleges reprezentatív szorzatrendszerre vonatkozóan. [8]-ban a szerző megmutatta, hogy a sorozat

$$\Psi_k = \prod_{i=0}^{k-1} \max_{s<m_i} \|\varphi_i^s\|_1 \|\varphi_i^s\|_\infty \quad (k \in \mathbf{N}).$$

fontos szerepet játszik ebben a kérdésben.

6. Tétel. *Ha G egy korlátos csopot korlátlan Ψ sorozattal, akkor minden $p \neq 2$, $1 < p < \infty$ esetén van olyan $f \in L^p(G)$ függvény, hogy $S_n f$ nem konvergál f-hez L^p-normában.*

Így a (2) összefüggésből következik, hogy főkérdésünk nem teljesül S_3 teljes direkt szorzatára, kivéve $p = 2$. Ellenben van olyan nem Abel csoport, amely ilyen tekintetben hasonlít a Vilenkin-rendszerekre.

7. Tétel. *Legyen G a Q_2 teljes direkt szorzata a 2. táblázat szerint és $1 < p < \infty$. Ekkor $S_n f$ konvergál f-hez L^p-normában minden $f \in L^p(G)$ esetén.*

A fenti tétel Gát Györggyel készült közös munka eredményeként jött létre és jelenleg megjelenésre lett beküldve.

Cesàro-közepek konvergenciája

Az előző részben megállapítottuk, hogy vannak reprezentatív szorzatrendszerek, ahol egy Fourier-sor részletösszege nem feltétlenül konvergál a függvényhez L^p-normában, ha $1 < p < \infty$, kivéve $p = 2$. Ezért nagyon érdekes az az állítás, hogy a Fejér-közepek

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f \quad (n \in \mathbf{P},\ \sigma_0 f := 0)$$

konvergálnak a függvényhez L^p-normában minden $1 \le p < \infty$ esetén, ha G egy korlátos csoport. Ezt az eredményt Gát György és Toledo Rodolfo jelentette meg [5]-ben.

8. Tétel. *Legen G egy korlátos csoport. Minden $L^p(G)$ $(1 \le p < \infty)$ esetén $\sigma_n f \to f$ L^p-normában.*

Másrészről, Gát György [1]-ben szintén igazolta a Fejér-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját.

9. Tétel. *Legen G egy korlátos csoport. Minden G-n értelmezett integrálható függvény esetén $\sigma_n f \to f$ majdnem mindenütt.*

Az α-rendű Cesàro számokat a következő módon értelmezzük

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!},$$

ahol α egy valós szám és $n \in \mathbf{N}$. Az előző jelöléssel értelmezzük az *α-rendű Cesàro-közepeket*, vagy egyszerűen a *(C,α)-közepeket* a következő módon

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k f \qquad (n \in \mathbf{P}).$$

Gát György és Toledo Rodolfo [3]-ban tanulmányozták a (C,α)-közepek konvergenciáját L^1-normában, de csak az α bizonyos értékei esetén kaptak pozitív eredményt.

10. Tétel. *Legen G egy korlátos csoport, $f \in L^p(G)$, ahol $1 \le p < \infty$, és*

$$\alpha_0 := \limsup_{k\to\infty} \log_{m_k} \max_{0\le s<m_k} \|\varphi_k^s\|_1 \|\varphi_k^s\|_\infty$$

Ha $\alpha_0 < \alpha < 1$, akkor $\sigma_n^\alpha f \to f$ L^p-normában.

11. Tétel. *Legen G egy korlátos csoport,*

$$\alpha_1 := \liminf_{k\to\infty} \log_{m_k} \max_{0\le s<m_k} \|\varphi_k^s\|_1 \|\varphi_k^s\|_\infty$$

és $0 < \alpha < \alpha_1$. Ekkor van olyan $f \in L^1(G)$ függvény, hogy $\sigma_n^\alpha f$ nem konvergál f-hez L^1-normában.

Hivatkozások

[1] G. Gát, *Pointwise convergence of the Fejér means on compact totally disconnected groups*, Acta Sci. Math. (Szeged), **60** (1995), 311–319.

[2] G. Gát and R. Toledo, *L^p-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Anal. Math. **22** (1996), 13–24.

[3] Gát, G., Toledo, R., *On the converge in L^1-norm of Cesàro means with respect to representative product systems*, Acta Math. Hungar. **123 (1-2)** (2009), 103–120

[4] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.

[5] R. Toledo, *Representation of product systems on the interval* $[0,1]$, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis., **19/1** (2003), 43–50.

[6] R. Toledo, *On the maximal value of Dirichlet kernels with respect to representative product systems*, Proceedings of 6th International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl., **82** (2010), 431–447.

[7] R. Toledo, *On the convergence of Fourier series in CTD groups*, Leindler, L., Schipp, F., Szabados, J (ed.), Functions, Series, Operators, Proceedings of the Alexits Memorial Conference, Budapest, August, 9-14, 1999, 403–415, 2002.

[8] R. Toledo, *Negative results concerning fourier series on the complete product of S_3*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 9(4), Art. 99 (2008), 7 pp.