Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Ph.D. Thesis

Orthogonal systems on local fields

Szerző: **Simon Ilona**

Témavezetők: Dr. Schipp Ferenc és
Dr. Daróczy Zoltán

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2013

Contents

Chapter 1

Introduction

The present work consists of four main topics related to the Blaschke functions defined on two special locally compact totally disconnected non-Archimedian normed fields: on the 2-adic (or arithmetic) field and on the 2-series (or logical, dyadic) field. First, we introduce and investigate the effect of dyadic martingale structure preserving transformations, or shortly DMSP transformations on function classes like the classes of UDMD systems, that of $\mathcal{A}_n$-measurable functions, the dyadic function spaces $L^p(\mathbb{I})$, $H^p(\mathbb{I})$, and the Lipschitz classes $Lip(\alpha, \mathbb{I})$. Secondly, we establish the character system of the Blaschke group on the arithmetic field. Then, we introduce the discrete Laguerre and the Malmquist-Takenaka systems on these fields, that are constructed by the Blaschke functions and the characters of the corresponding field. Both of the last mentioned are UDMD product systems, thus complete and orthonormal, while in the second topic $v_n \circ \gamma$ possesses these properties. Finally, after several opportunities of defining 2-adic sine and cosine functions follows the construction and investigation of 2-adic Chebyshev polynomials. All of these are connected to DMSP transformations, as they share essentially the type of the recursion.

We construct some orthogonal systems related to the Blaschke functions or general dyadic martingale structure preserving functions and to the Walsh-Paley system or to the characters of the 2-adic field. However, this work does not claim to be a complete treatment of the subject. We have chosen to use the methods of the product systems of UDMD systems.

Credits

Chapter 4 is based on [42]:

Simon, I., *On transformations by dyadic martingale structure preserving functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 39 (2013), pp, 381-390.

Chapter 5 is based on [40]:

Simon, I., *The characters of the Blaschke-group*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 54(3)(2009), pp. 149-160.

Chapter 6, is based on [39]:

Simon, I., *Discrete Laguerre functions on the dyadic fields*, Pure Math. Appl., 17(3-4)(2006), pp. 459-468.

Chapter 7 is based on [41]:

Simon, I. *Malmquist-Takenaka functions on local fields*, Acta Univ. Sapientiae Math., 3(2)(2011), pp. 135-143.

Chapter 8 is based on [43]:

Simon, I. *Construction of 2-adic Chebyshev polynomials*, submitted.

Chapter 2

Algebraic and topological structure

This chapter follows the concepts, notations and propositions of Schipp and Wade[17]. We recall some definitions and properties concerning the algebraic and topological structure of the 2-series and 2-adic fields.

The *set of bits* is defined by $\mathbb{A} := \{0, 1\}$, and the *set of bytes* by: $\mathbb{B} := \{a = (a_j, j \in \mathbb{Z}) \mid a_j \in \mathbb{A} \text{ and } \lim_{j\to-\infty} a_j = 0\}$. The *order* of a byte $x \in \mathbb{B}$ is defined in the following way: For $x \neq \theta := (0, j \in \mathbb{Z})$ let $\pi(x) := n$ if and only if $x_n = 1$ and $x_j = 0$ for all $j < n$, furthermore set $\pi(\theta) = +\infty$. The function: $\|x\| := 2^{-\pi(x)}$ for $x \in \mathbb{B} \setminus \{\theta\}$, and $\|\theta\| := 0$ is a non-Archimedean norm, that leads us to a a non-Archimedean metric.

We consider the 2-series/logical/dyadic and 2-adic/arithmetical operations, and recall, that $(\mathbb{B}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ and $(\mathbb{B}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ are non-Archimedean normed fields. We use furthermore the intervals $\mathbb{I}_n := \{x \in \mathbb{B} : \|x\| \leqq 2^{-n}\}$ for any $n \in \mathbb{Z}$ and the unit ball $\mathbb{I} := \mathbb{I}_0 = \{a = (a_j, j \in \mathbb{N}) | \; a_j \in \{0, 1\}\}$ to construct dyadic martingale structure. We consider a normalized Haar measure μ with property $\mu(\mathbb{I}) = 1$, and the concept of UDMD systems is summarized.

The concept of *UDMD systems* is due to Schipp[16]. We recall, that $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ is a UDMD sequence if and only if

$$\phi_n = r_n g_n, \; g_n \in L(\mathcal{A}_n), \; |g_n| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.1}$$

and we call a system $\psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ a *UDMD product system*, if it is a product system generated by a UDMD system, i.e., there is a UDMD system $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$

such that for each $m \in \mathbb{N}$ with binary expansion $m = \sum_{j=0}^{\infty} m_j 2^j$ $(m_j \in \mathbb{A}, j \in \mathbb{N})$, the function ψ_m is obtained by: $\psi_m = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_j^{m_j} \qquad (m \in \mathbb{N})$.

The transformation method

If we consider the Fourier expansion with respect to a system given by the composition of the character system and a measure preserving transformation, then its partial sums and Cesaro means can be expressed by partial sums and Cesaro means of Fourier series with respect to the characters. This will be applied to discuss summability and convergence questions.

Let now $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ denote the character set of the studied additive group, and consider a measure-preserving variable transformation $T : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Then, $\int_{\mathbb{I}} f \circ T \, d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu$.

Definition 1 *Let us define the T-Fourier coefficients of an $f \in L^1(\mathbb{I})$, the T-Fourier series $S^T f$ of f, the n-th partial sum and the T-Cesaro (or $(T - C, 1)$) means of the T-Fourier series by*

$$\widehat{f^T}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x)\phi_n(T(x))d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$S^T f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^T}(k) \cdot \phi_k \circ T, \quad S_n^T f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^T}(k) \cdot \phi_k \circ T \ (n \in \mathbb{P}),$$

$$\sigma_0^T f := 0 \ \textit{and} \quad \sigma_n^T f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^T f \quad (n \in \mathbb{P}).$$

Proposition 1 *For any $f \in L^1(\mathbb{I}), \ n \in \mathbb{P}$ hold*

$$S_n^T f = \left[S_n(f \circ T^{-1})\right] \circ T, \ \textit{and} \tag{2.2}$$

$$\sigma_n^T f = \left[\sigma_n(f \circ T^{-1})\right] \circ T, \tag{2.3}$$

where S_n and σ_n stand for the corresponding notions with respect to the characters $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ of the additive group.

Remark: On the complex field basically this method was used in terms of the scalar products in Bokor-Schipp [3]. On the studied fields the presented proposition enabled the author to handle a.e. convergence and summabilty questions of Fourier series with respect to the discrete Laguerre and $(v_n \circ \gamma, n \in \mathbb{N})$ systems in I. Simon [39] and I. Simon[40]. Professor F. Schipp claimed that the proposition is also true for general measure-preserving transformations. We will use the term "transformation method" in this work to ease the explanations.

Chapter 3

Some useful functions

This chapter is devoted to some useful tools which are used in the next chapters. First, we present the characters of the dyadic and 2-adic additive groups based on the handbook of Schipp and Wade [17] and using the notion of the product system. Then we give the notions and results regarding the $(\tilde{\mathbb{S}}, \bullet)$-valued exponential function ζ. Then follows the definitions and properties of the respective Blaschke functions. From that point on, this work contains the results of the author.

The characters of $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+})$ can be written as the product system generated by the Rademacher functions $(r_n, n \in \mathbb{N}), r_n(x) := (-1)^{x_n}$ $(x \in \mathbb{I})$ to get the Walsh-Paley functions $w_n(x) := (-1)^{\sum_{j=0}^{+\infty} n_j x_j} = \prod_{j=0}^{\infty} r_j(x)^{n_j}$ $(x \in \mathbb{I})$, where $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j \in \mathbb{N}$ $(n_j \in \mathbb{A})$.

Consider $\epsilon(t) := \exp(2\pi i t)$ $(t \in \mathbb{R})$. The character system $(v_m, m \in \mathbb{N})$ of $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+})$ is the product system generated by the functions $(v_{2^n}(x), n \in \mathbb{N})$, that is: $v_m(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (v_{2^j}(x))^{m_j}$, where $v_{2^n}(x) := \epsilon\left(\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n-1}}{2^2} + \dots\right)$ $\quad (x \in \mathbb{I})$.

The $\tilde{\mathbb{S}}$-valued exponential function on $\mathbb{I}_1$: A 2-adic exponential function is presented in Schipp [17], pp 59-60. We will use a similar one determined by a slightly different base, starting from $b_1 = e \overset{\bullet}{+} e_2$ instead of $e \overset{\bullet}{+} e_1$. Let us use the notation $\tilde{\mathbb{S}} := \{x \in \mathbb{S} : x_1 = 0\}$. By using the symbol of product, we mean the arithmetical product. Consider the following base: $b_1 := e \overset{\bullet}{+} e_2$, $b_n := b_{n-1} \bullet b_{n-1}$ $(n \geq 2)$. The $(\tilde{\mathbb{S}}, \bullet)$-valued **exponential function** ζ on $\mathbb{I}_1$ is defined by

$$\zeta(x) := \prod_{j=1}^{\infty} b_j^{x_j} \qquad (x = (x_j, j \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{I}_1). \tag{3.1}$$

$\zeta : \mathbb{I}_1 \to \tilde{\mathbb{S}}$ is a continuous isomorphism and satisfies the functional equation

$$\zeta(x \overset{\bullet}{+} y) = \zeta(x) \bullet \zeta(y) \qquad (x, y \in \mathbb{I}_1). \tag{3.2}$$

The Blaschke functions

We will present the logical and arithmetical Blaschke functions, which were introduced and studied in Simon[39] and Simon[40].

Definition 2 *For $a \in \mathbb{I}_1$ define the logical Blaschke function on $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ by:*

$$B_a(x) := (x \overset{\circ}{+} a) \circ (e \overset{\circ}{+} a \circ x)^{-1} = \frac{x \overset{\circ}{+} a}{e \overset{\circ}{+} a \circ x} \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{3.3}$$

B_a is a bijection on the unit ball $\mathbb{I}$ and on the unit sphere $\mathbb{S} := \mathbb{S}_0 = \{x \in \mathbb{B} \mid \|x\| = 1\}$, the inverse of B_a is $B_a^{-1} = B_a$, and as

$$B_a(B_b(x)) = B_c(x) \ \ (x \in \mathbb{I}), \text{ where } c = \frac{a \overset{\circ}{+} b}{e \overset{\circ}{+} a \circ b} = B_a(b) \in \mathbb{I}_1 \tag{3.4}$$

holds for any $a, b \in \mathbb{I}_1$, the maps B_a $(a \in \mathbb{I}_1)$ form a commutative group with respect to the composition of functions and each element is of order 2.

Definition 3 *For $a \in \mathbb{I}_1$ define the arithmetical Blaschke function on $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ as:*

$$B_a(x) := (x \overset{\bullet}{-} a) \bullet (e \overset{\bullet}{-} a \bullet x)^{-1} = \frac{x \overset{\bullet}{-} a}{e \overset{\bullet}{-} a \bullet x} \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{3.5}$$

We state first, that the function is well-defined. Then,

Proposition 2 *$B_a : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ is a bijection for any $a \in \mathbb{I}_1$ on $\mathbb{I}$, and on $\mathbb{S} \subset \mathbb{I}$ as well.*

Furthermore the inverse function is $B_a^{-1} = B_{a^-}$. The composition of two Blaschke functions is also a Blaschke function:

$$B_a \circ B_b = B_c, \quad \text{where } c = \frac{a \overset{\bullet}{+} b}{e \overset{\bullet}{+} a \bullet b} \in \mathbb{I}_1 \quad (a, b \in \mathbb{I}_1) \tag{3.6}$$

and with the notation $a \lhd b := \frac{a \overset{\bullet}{+} b}{e \overset{\bullet}{+} a \bullet b} \in \mathbb{I}_1 \quad (a, b \in \mathbb{I}_1)$ we have, that $B_a \circ B_b = B_{a \lhd b}$ $(a, b \in \mathbb{I}_1)$. Thus the maps B_a $(a \in \mathbb{I}_1)$ form a commutative group with respect to the composition of functions.

Definition 4 *We will call* $(\mathcal{B}, \circ)$ *the Blaschke group of the field* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$*, where*

$$\mathcal{B} := \{B_a, a \in \mathbb{I}_1\} \tag{3.7}$$

and $\circ$ *denotes the composition of functions.*

Proposition 3 *[I. Simon[39]] To any given* $x \in \mathbb{I}, a \in \mathbb{I}_1$*, the byte* $y = B_a(x)$ *can be written on both fields in* **the recursive form**

$$y_n = x_n + a_n + f_n(x_0, \cdots, x_{n-1}) \quad (mod\ 2) \tag{3.8}$$

where the functions $f_n : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *depend on the bits of* a*.*

Chapter 4

Dyadic martingale structure preserving transformations

This chapter is based on Simon[42], and here is concerned the argument transformation given by the composition with a Blaschke function, and in general, a dyadic martingale structure preserving transformation or shortly a DMSP-transformation, and we deal with questions related to the effect of a DMSP-tranformation on special function classes. We obtain, that composition with a DMSP-function preserves the classes of UDMD systems, that of $\mathcal{A}_n$-measurable functions, the dyadic function spaces $L^p(\mathbb{I})$, $H^p(\mathbb{I})$, and the Lipschitz classes $Lip(\alpha, \mathbb{I})$. Then we give some examples of DMSP-transformations.

Definition 5 *We call a function $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ a dyadic martingale structure preserving function or shortly a DMSP-transformation if it is generated by a system of bijections $(\vartheta_n, n \in \mathbb{N})$, $\vartheta_n : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, and an arbitrary system $(\eta_n, n \in \mathbb{N}^*)$, $\eta_n : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ in the following way:*

$$
\begin{aligned}
&(B(x))_0 := \vartheta_0(x_0), \\
&(B(x))_n := \vartheta_n(x_n) + \eta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \pmod 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*).
\end{aligned}
$$

The notion of the DMSP-transformation refers mostly to the function, but at times to the composition with the given DMSP-transformation, which is obvious from the context.

Proposition 4 *For each generating systems* $(\vartheta_n, n \in \mathbb{N})$ *and* $(\eta_n, n \in \mathbb{N}^*)$*, the generated DMSP-transformation* B *is a bijection on* $\mathbb{I}$ *and its inverse function,* B^{-1} *is also a DMSP-transformation.*

Proposition 5 *Composition of DMSP-functions is also a DMSP-function.*

The question, which function systems can be transformed by a DMSP-transformation into a UDMD system, has a simple answer: exactly the UDMD systems. The following lemma is needed to see this.

Lemma 1 *[I. Simon[42]] a) Let* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *be a DMSP-transformation. Then, for each* $n \in \mathbb{N}$ *we have*

$$r_n \circ B = r_n \cdot h_n \text{ with some } h_n \in L(\mathcal{A}_n), |h_n| = 1. \tag{4.1}$$

b) $L(\mathcal{A}_n)$ *is invariant under any DMSP-transformation.*

Theorem 1 *[I. Simon[42]] Let* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *be a DMSP-transformation. The function system* $(f_n, n \in \mathbb{N})$ *is a UDMD system on* $\mathbb{I}$ *if and only if* $(f_n \circ B, n \in \mathbb{N})$ *is a UDMD system on* $\mathbb{I}$*.*

Theorem 2 *[I. Simon[43]] Let* $(B_n : \mathbb{I} \to \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$ *be a system of DMSP-transformations. The function system* $(f_n, n \in \mathbb{N})$ *is a UDMD system on* $\mathbb{I}$*, if and only if* $(f_n \circ B_n, n \in \mathbb{N})$ *is a UDMD system on* $\mathbb{I}$*.*

As UDMD systems are taken into UDMD systems by a DMSP-transformation, the so-called transformation method presented in Chapter 2 implies that theorems concerning the a.e. convergence and $(C, 1)$-summation of Fourier series with respect to the character system are also preserved by this kind of transformation.

The question is in the following, whether function classes $L^p(\mathbb{I})$ $(0 < p \leq \infty)$ and $H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p < \infty)$ are invariant under a DMSP-transformation. For the answer it is essential that this transformation is measure-preserving.

Lemma 2 *[I. Simon[42]] Let* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *be a DMSP-transformation and* $n \in \mathbb{N}$*. Then*

$$B(I_n(x)) = I_n(B(x)) \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{4.2}$$

Proposition 6 *[I. Simon[42]] DMSP-transformations $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ are measure-preserving. Hence,*

$$\int_{\mathbb{I}} f \circ B \; d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu \qquad (f \in L^1(\mathbb{I})). \tag{4.3}$$

Theorem 3 *[I. Simon[42]] A DMSP-transformation preserves $L^p(\mathbb{I})(0 < p \leq \infty)$ and the dyadic Hardy space $H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p < \infty)$. Moreover,*

$$\|f \circ B\|_p = \|f\|_p \;(0 < p \leq \infty), \tag{4.4}$$

$$\|f \circ B\|_{H^p} = \|f\|_{H^p} \;(0 < p < \infty). \tag{4.5}$$

Remark 2. As a consequence, follows that

$$\|f \circ B\|_{BMO} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \left(\mathcal{E}_n |f - \mathcal{E}_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \circ B\|_\infty = \|f\|_{BMO}.$$

Thus the space of dyadic bounded mean oscillation (BMO) and the space of dyadic vanishing mean oscillation (VMO) are also preserved under a DMSP-transformation.

Recall, that for $\alpha > 0$ the function class $Lip(\alpha, \mathbb{B})$ denotes the collection of functions $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$|f(y) - f(x)| \leq c \; \rho(x, y)^\alpha \quad (x, y \in \mathbb{B})$$

for some constant $c \in \mathbb{R}$ which depends only on f.

Theorem 4 *[I. Simon[42]] A DMSP-transformation preserves $Lip(\alpha, \mathbb{I})$ $(\alpha > 0)$.*

Examples of DMSP-functions:

Some examples of DMSP-functions are presented on the fields $(\mathbb{B}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ and $(\mathbb{B}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$: the translations, dilatations, the function resulting the multiplicative inverse $B(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, a generalization of ζ and the Blaschke functions, as well.

Chapter 5

The characters of the Blaschke group

In this chapter we will see that the Blaschke group $(\mathcal{B}, \circ)$ of the field $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ is a topological group and we will construct its characters. After determining the type of the recursion we will discuss summability and convergence questions. This chapter is based on Simon[40].

5.1 The construction of the characters of the Blaschke group

We make it clear first, that the group of the Blaschke functions, the so-called Blaschke group $(\mathcal{B}, \circ)$ of the field $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ is a topological group, and we determine its characters. The operation $x \triangleleft y := \frac{x \overset{\bullet}{+} y}{e \overset{\bullet}{+} x \bullet y}$ $(x, y \in \mathbb{I}_1)$ determined by the composition $B_a \circ B_b = B_{a \triangleleft b}$ leads to the functional equation of the tangent function tan. This gives the idea of this chapter, where the characters of the Blaschke group of the 2-adic group are constructed by means of a tangent-like function.

The map $B : (\mathbb{I}_1, \triangleleft) \to (\mathcal{B}, \circ),\ a \mapsto B_a$ is a continuous isomorphism, hence in order to establish the characters of $(\mathcal{B}, \circ)$, it is sufficient to define the character group of $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$. Furthermore, the characters of $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+})$ are already known: the functions $(v_n, n \in \mathbb{N})$.

Thus we have to give a continuous isomorphism from the additive group $(\mathbb{I}_1, \dot{+})$ onto $(\mathbb{I}_1, \lhd)$, that is a function γ satisfying the equation

$$\gamma(x \dot{+} y) = \frac{\gamma(x) \dot{+} \gamma(y)}{e \dot{+} \gamma(x) \bullet \gamma(y)} \quad (x, y \in \mathbb{I}_1).$$

These thoughts can be interpreted as the solution of the functional equation of tan on the local field.

Definition 6 *Define tangent-like function on* $(\mathbb{I}_1, \dot{+})$ *by*

$$\gamma(x) := \frac{\zeta(x) \dot{-} e}{\zeta(x) \dot{+} e} \quad (x \in \mathbb{I}_1). \tag{5.1}$$

We collect in a lemma the properties that are needed for our subsequent study.

Lemma 3 *[I. Simon[40]] For any* $a, b \in \mathbb{B}, x \in \mathbb{I}_1$ *and* $y \in \mathbb{I}_1$*, the following holds:*

i) $a \dot{+} a = e_1 \bullet a$ *iii)* $\zeta^2(x) = \zeta(e_1 \bullet x)$

ii) $\dfrac{a \dot{+} a}{b \dot{+} b} = \dfrac{a}{b}$ *iv)* $\dfrac{e \dot{+} y}{e \dot{-} y} \in \tilde{\mathbb{S}}$.

Lemma 8 *iii)* shows, that the tangent-like function γ is closely related to tan: namely $\gamma(x) = \tan(e_{-1} \bullet x)$ $(x \in \mathbb{I}_1)$.

Theorem 5 *[I. Simon[40]] The function* γ *defined in (13.1) is a continuous isomorphism from* $(\mathbb{I}_1, \dot{+})$ *onto* $(\mathbb{I}_1, \lhd)$*.*

Theorem 6 *[I. Simon[40]] The characters of the group* $(\mathbb{I}_1, \lhd)$ *are the functions*

$$v_n \circ \gamma^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Corollary 1 *[I. Simon[40]] The characters of the Blaschke group* $(\mathcal{B}, \circ)$ *are the functions*

$$v_n \circ \gamma^{-1} \circ B^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

where $(\mathcal{B}, \circ)$ *denotes the Blaschke group of the arithmetic field* $(\mathbb{I}, \dot{+}, \bullet)$*, and* $B : (\mathbb{I}_1, \lhd) \to (\mathcal{B}, \circ)$ *represents the function* $a \mapsto B_a$*.*

5.2 Recursion

We show that $\gamma(x)$ can be obtained by a simple recursion, and therefore:

Proposition 7 *[I. Simon[40]] The functions $v_n \circ \gamma^{-1}(n \in \mathbb{N})$, the characters of $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$ form a UDMD product system.*

As $(v_n \circ \gamma^{-1}, n \in \mathbb{N})$ is a UDMD product system, the discrete Fourier coefficients with respect to this system can be computed with the Fast Fourier Algorithm. See Schipp-Wade[17], pp. 106-111 about the FFT Algorithms.

5.3 (C,1) summability and a.e.convergence of the Gamma-Fourier series

As a consequence of its recursion form, the function γ is a bijection on $I_n(x)$, $(x \in \mathbb{I}_1, n \in \mathbb{N})$, $\gamma(I_n(x)) = I_n(\gamma(x))$, therefore the variable transformation γ is measure preserving. This follows also by the fact, that γ is a DMSP-transformation presented in Chapter 4. Thus,

$$\int_{\mathbb{I}_1} f \circ \gamma \; d\mu = \int_{\mathbb{I}_1} f \; d\mu. \tag{5.2}$$

Definition 7 *The Gamma-Fourier coefficients of an $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$ with respect to the system $(v_m \circ \gamma^{-1}, m \in \mathbb{N})$ are defined by*

$$\widehat{f^\gamma}(m) := \int_{\mathbb{I}_1} f(x) v_m(\gamma^{-1}(x)) d\mu(x) \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Define the Gamma-Fourier series of an $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$ and the n-th partial sums of the Gamma-Fourier series S^γ by

$$S^\gamma f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^\gamma}(k) \cdot v_k \circ \gamma^{-1},$$

$$S_n^\gamma f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^\gamma}(k) \cdot v_k \circ \gamma^{-1} \ (n \in \mathbb{P})$$

Furthermore define the Gamma-Cesaro (or $(G{-}C,1)$) means of $S^\gamma f$ by $\sigma_0 f := 0$ and

$$\sigma_n^\gamma f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^\gamma f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

The counterparts of the Carleson-Hunt theorem on the a.e. convergence of Fourier series of an $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ and of the Lebesgue's theorem about the (C,1)-summability for $f \in L^1(\mathbb{R})$ hold for the Gamma-Fourier series of an $f \in L^p(\mathbb{I}_1)$ $(p > 1)$ and $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$, respectively. The first one is a direct consequence of the general result of Schipp [37](Theorem 4) on the a.e. convergence of Fourier series with respect to any UDMD product system of an $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$. The second one is a consequence of the general result of Gát[9](Theorem 15) for Vilenkin-like systems, a generalization of UDMD product systems, thus also of $(v_n \circ \gamma^{-1}, n \in \mathbb{N})$. However, these can be obtained directly using results on expansion with respect to the character system $(v_n, n \in \mathbb{N})$ and applying the transformation method presented in Paragraph 10.

Theorem 7 *On the field* $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *we have*

> *a)* $S_n^\gamma f \to f$ *a.e. as* $n \to \infty$ *for any* $f \in L^p(\mathbb{I}_1)(p > 1)$;
>
> *b)* $\sigma_n^\gamma f \to f$ *a.e. as* $n \to \infty$ *for any* $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$.

Remark 4. As $v_n \circ \gamma$ is a UDMD product system, the general theorems for UDMD systems and Vilenkin-like systems imply also norm convergence of the Fourier series with respect to this system:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^\gamma f - f\|_q = 0, \ (f \in L^q(\mathbb{I}_1), (1 \le q < \infty) \tag{5.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m^\gamma f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}_1)), (1 < q < \infty) \tag{5.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^\gamma f - f\|_q = 0, \ (f \in L^1(\mathbb{I}_1). \tag{5.5}$$

Moreover, (13.4) and (13.5) holds for $q = \infty$ when f is continuous on $\mathbb{I}$.

Chapter 6

Discrete Laguerre functions on local fields

6.1 Introduction

This chapter is devoted to the construction of discrete Laguerre functions on both local fields. The role of the power function of the classical system is taken by the characters of the corresponding field, and their composition with Blaschke functions build the dyadic discrete Laguerre systems. After the model of the classical system, we introduce discrete Laguerre systems as the composition of the respective additive characters of the local fields and the Blaschke functions. We have shown in Chapter 3, that the bits of the values of the Blaschke functions B_a can be obtained with recursion using the bits of the variable and the bits of the parameter a. As a consequence of this recursion follows, that the systems in question are UDMD product systems, as well. As a consequence, results regarding UDMD systems are valid for the discrete Laguerre systems. Paragraph 6.4 deals with the a.e. convergence and (C,1)-summability of the Fourier series with respect to these systems using some basic results of Schipp[15] and Gát[7] on the a.e. convergence and (C,1)-summability of the Fourier series with respect to the characters of the dyadic and 2-adic field.

6.2 Discrete Laguerre functions on the dyadic (or 2-series) field

Definition 8 *Define the logical discrete Laguerre functions associated to B_a with parameter $a \in \mathbb{I}_1$ by*

$$L_k^{(a)}(x) := w_k(B_a(x)) \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}). \tag{6.1}$$

For $a \in \mathbb{I}_1$ consider the functions $r_n \circ B_a \quad (x \in \mathbb{I},\ n \in \mathbb{N})$. (Here $\circ$ stands for function-composition.) The logical discrete Laguerre system $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ is the product system generated by $(r_n \circ B_a, n \in \mathbb{N})$:

$$L_k^{(a)}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[r_n(B_a(x))\right]^{k_n}.$$

Theorem 8 *[I. Simon[39]] For each $a \in \mathbb{I}_1$ the functions $(r_n \circ B_a,\ n \in \mathbb{N})$ form a UDMD system on $\mathbb{I}$.*

Corollary 2 *[I. Simon[39]] The logical discrete Laguerre-system $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ is a UDMD product system generated by $(r_n \circ B_a, n \in \mathbb{N})$, consequently it is complete and orthonormal.*

6.3 Discrete Laguerre functions on the 2-adic field

Definition 9 *Let us define the arithmetical discrete Laguerre functions associated to B_a in the following way:*

$$L_k^{(a)}(x) := v_k(B_a(x)) \qquad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}). \tag{6.2}$$

For $a \in \mathbb{I}_1$ and $n \in \mathbb{N}$ consider the functions $v_{2^n} \circ B_a$ on $\mathbb{I}$. The arithmetical discrete Laguerre system $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ is the product system generated by $(v_{2^n} \circ B_a, n \in \mathbb{N})$:

$$L_k^{(a)}(x) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left[v_{2^j}(B_a(x))\right]^{k_j} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Theorem 9 *[I. Simon[39]] For each $a \in \mathbb{I}_1$ and $n \in \mathbb{N}$ the functions $v_{2^n} \circ B_a$ form a UDMD system on $\mathbb{I}$.*

Corollary 3 *[I. Simon[39]] The discrete Laguerre-system* $(L_m^{(a)}, m \in \mathbb{N})$ *is a UDMD product system generated by* $(v_{2^n} \circ B_a, n \in \mathbb{N})$*, consequently it is complete and orthonormal.*

6.4 (C,1)-summability and a.e. convergence of Laguerre-Fourier series

Let now B_a and $L_n^{(a)}$ denote the respective Blaschke functions and discrete Laguerre functions on the studied fields $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ and $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ $(a \in \mathbb{I}_1)$. The variable transformation $T : \mathbb{I} \to \mathbb{I},\ T(x) := B_a(x)$ is measure preserving, hence,

$$\int_{\mathbb{I}} f \circ B_a \, d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu. \tag{6.3}$$

Definition 10 *Let us define the Laguerre-Fourier coefficients of an* $f \in L^1(\mathbb{I})$ *by*

$$\widehat{f^{(a)}}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x) L_n^{(a)}(x) d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Furthermore the Laguerre-Fourier series $S^{(a)}f$ *of an* $f \in L^1(\mathbb{I})$ *and the* n*-th partial sum* $S_n^{(a)}f$ *of the Laguerre-Fourier series* $S^{(a)}$ *is defined by*

$$S^{(a)}f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^{(a)}}(k) L_k^{(a)},$$

$$S_n^{(a)}f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^{(a)}}(k) L_k^{(a)} \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

Let us define the Laguerre-Cesaro (or $(L-C,1)$*) means of* $S^{(a)}f$ *by* $\sigma_0^{(a)}f := 0$ *and*

$$\sigma_n^{(a)}f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^{(a)} f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

The counterparts of the Carleson-Hunt theorem on the a.e. convergence of Fourier series of an $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ and of the Lebesgue's theorem about the (C,1)-summability for $f \in L^1(\mathbb{R})$ hold for the Laguerre-Fourier series of an $f \in L^p(\mathbb{I})$ $(p > 1)$ and $f \in L^1(\mathbb{I})$, respectively. The first one is a direct consequence of the general result of Schipp [37](Theorem 4) on the a.e. convergence of Fourier series with respect to any UDMD product system of an $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$. The second one is a consequence of the general result of Gát[9](Theorem 15) for Vilenkin-like systems, a generalization of UDMD product systems, thus also of $(L_n^{(a)}, n \in \mathbb{N})$. However, these can be obtained using previous special results on expansion with respect to character systems $(w_n, n \in \mathbb{N})$ and $(v_n, n \in \mathbb{N})$, respectively, and using the transformation method presented in Paragraph 10.

Theorem 10 *On both fields* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ *and* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *we have*

$$a)\ S_n^{(a)} f \to f \text{ a.e. as } n \to \infty \text{ for any } f \in L^p(\mathbb{I}), p > 1;$$

$$b)\ \sigma_n^{(a)} f \to f \text{ a.e. as } n \to \infty \text{ for any } f \in L^1(\mathbb{I}).$$

Remark 5. As discrete Laguerre systems $(L_n^{(a)}, n \in \mathbb{N})$ are UDMD product systems, also the norm convergence of the Fourier series with respect to them is valid:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^{(a)} f - f\|_q = 0,\ (f \in L^q(\mathbb{I}), (1 \le q < \infty) \tag{6.4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m^{(a)} f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I})), (1 < q < \infty) \tag{6.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^{(a)} f - f\|_q = 0,\ (f \in L^1(\mathbb{I})). \tag{6.6}$$

Moreover, (14.5) and (14.6) holds for $q = \infty$ when f is continuous on $\mathbb{I}$.

Chapter 7

Malmquist-Takenaka functions

The complex variants of the Malmquist-Takenaka systems play an important role in system identification. In this chapter are presented the construction of the analogue of these functions on both studied local fields using the generator system of the corresponding characters and the Blaschke functions. These will be UDMD product systems, thus also complete orthonormal systems, which equals the discrete Laguerre system for identical parameters $a_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$. Properties of these systems, Fourier expansion and summability questions are presented. This chapter is based on Simon [41].

7.1 Malmquist-Takenaka systems on the dyadic and arithmetic field

Definition 11 *To any given system of bytes* $(a_i \in \mathbb{I}_1, i \in \mathbb{N})$ *define the logical Malmquist-Takenaka functions* $(\psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ *with parameters* $p = (a_0, a_1, \ldots)$ *on the 2-series field* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ *as the product system generated by*

$$(\varphi_{n,a_n} := r_n \circ B_{a_n}, n \in \mathbb{N}). \tag{7.1}$$

That is, $\psi_k^{(p)}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [r_n(B_{a_n}(x))]^{k_n} \quad (x \in \mathbb{I}).$

Remark 6. In the recursion form $y_n = x_n + f_n^m(x_0, \ldots, x_{n-1})$ of $y = B_{a_m}(x)$ presented in (11.8) the functions $f_n^m : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ depend on the parameter $a_m \in \mathbb{I}_1$. As we need here different bytes a_m in our construction, we use upper indices to indicate the applied byte. Now, from all these functions

$$\begin{array}{rccccc}
\text{belonging to } a_1 : & f_1^1 & f_2^1 & \ldots & f_n^1 & \ldots \\
\text{belonging to } a_2 : & f_1^2 & f_2^2 & \ldots & f_n^2 & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
\text{belonging to } a_m : & f_1^m & f_2^m & \ldots & f_n^m & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

we will use only the elements from the diagonal, the f_n^n-s, like in the Cantor's diagonal argument.

Theorem 11 *[I. Simon[41]] For every parameter-sequence $(a_i \in \mathbb{I}_1, i \in \mathbb{N})$ the functions $(\varphi_{n,a_n},\ n \in \mathbb{N})$ defined in (15.1) form a UDMD system on $\mathbb{I}$.*

Corollary 4 *[I. Simon[41]] The logical Malmquist-Takenaka system $(\psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ is a UDMD product system, consequently it is a complete orthonormal system on $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$.*

Definition 12 *Let us define the arithmetical Malmquist-Takenaka functions $\left(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N}\right)$ with parameters $p = (a_0, a_1, \ldots)$ $(a_n \in \mathbb{I}_1, n \in \mathbb{N})$ on the 2-adic field $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ in the following way: the system $\left(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N}\right)$ is the product system generated by*

$$(\Phi_{n,a_n} := v_{2^n} \circ B_{a_n}, n \in \mathbb{N})\,. \tag{7.2}$$

That is, $\Psi_n^{(p)}(x) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[v_{2^j}(B_{a_j}(x))\right]^{n_j} \quad (x \in (\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet))$.

Theorem 12 *[I. Simon[41]] For any $(a_n \in \mathbb{I}_1,\ n \in \mathbb{N})$ the functions $(\Phi_{n,a_n},\ n \in \mathbb{N})$ defined by (15.2) form a UDMD system on $\mathbb{I}$.*

Corollary 5 *[I. Simon[41]] The arithmetical Malmquist-Takenaka functions $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ form a UDMD product system, consequently it is a complete orthonormal system on $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$.*

Proposition 8 *Particularly, using the same parameters $a_n = a \in \mathbb{I}_1 \quad (n \in \mathbb{N})$ the Malmquist-Takenaka functions $\Psi_n^{(p)}(x)$ equal the discrete Laguerre functions $L_n^{(a)}(x)$ on fields $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ and $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$.*

Clearly, with the special parameters $a_n = \theta \ (n \in \mathbb{N})$, this system is not else, than the additive character system of the corresponding field. That is, Malmquist-Takenaka systems are a generalization of the character system of the corresponding additive group, as well.

7.2 Summability and convergence questions

Let now denote by $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ the Malmquist-Takenaka system on the corresponding field, that is, we handle them at once in this section.

Definition 13 *Let $a_n \in \mathbb{I}_1 (n \in \mathbb{N})$ form a parameter sequence $p = (a_0, a_1, \ldots)$. The Malmquist-Takenaka-Fourier coefficients $\widehat{f^{(p)}}$ of an $f \in L^1(\mathbb{I})$ with parameter sequence p, the n-th partial sum $S_n^{(p)} f$ of the Malmquist-Takenaka-Fourier series $S^{(p)} f$, and the Malmquist-Takenaka-Cesaro (or $MT - (C,1)$) means of $S^{(p)} f$ are defined by*

$$\widehat{f^{(p)}}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x) \Psi_n^{(p)}(x) d\mu(x) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$S_n^{(p)} f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^{(p)}}(k) \Psi_k^{(p)} \ (n \in \mathbb{P}),$$

$$\sigma_0^{(p)} f := 0 \text{ and } \sigma_n^{(p)} f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^{(p)} f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

Properties of UDMD product systems are valid for the Malmquist-Takenaka systems $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ on the corresponding fields, thus applying general theorems on convergence and summability of Schipp [37](Theorem 4) and of

Gát[9](Theorem 15), the following holds:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^{(p)} f - f\|_q = 0, \ (f \in L^q(\mathbb{I}), 1 \le q < \infty), \tag{7.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{m}^{(p)} f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}), 1 < q < \infty), \tag{7.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_{n}^{(p)} f - f\|_q = 0, \ (f \in L^1(\mathbb{I})), \tag{7.5}$$

$$S_{2^n}^{(p)} f \to f \qquad a.e. \qquad (f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{I})), \tag{7.6}$$

$$S_{m}^{(p)} f \to f \qquad a.e. \qquad (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}), q > 1), \tag{7.7}$$

$$\sigma_{n}^{(p)} f \to f \qquad a.e. \qquad (f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{I})). \tag{7.8}$$

Moreover, (15.4) and (15.5) holds for $q = \infty$ when f is continuous on $\mathbb{I}$. (15.6) holds a.e. and also at every point of continuity of f.

Chapter 8

Construction of 2-adic Chebyshev polynomials

8.1 Introduction

This Chapter is based on [43]. Chebyshev polynomials play an important role for example in approximation theory. In classical analysis the Chebyshev polynomials of the first and second kind can be expressed through the identities

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);\; U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sin(\arccos x)}\; (x \in [-1,1],\; n \geq 0),$$

where the cosine and sine functions can be given by means of the exponential function: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ and $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Each of the Chebyshev polynomials of the first and second kind form an orthogonal system with respect to a specific weight function.

In this chapter we will construct some analogies of the Chebyshev polynomials on the 2-adic field $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ using several kinds of 2-adic cosine and sine functions. We present two opportunities to construct 2-adic trigonometric functions expressed by the additive characters $(v_n, n \in \mathbb{N})$ or by the $\tilde{\mathbb{S}}$-valued exponential functions, which is in connection with the multiplicative characters. In this way we will obtain first two DMSP-transformations of $(v_n, n \in \mathbb{N})$, which will yield a UDMD product system, thus complete and orthonormal. Then follow further types of Chebyshev polynomials, which also fulfil orhogonality.

Throughout this chapter for $x \in I$ let $n \cdot x := \underbrace{x \overset{\bullet}{+} x \overset{\bullet}{+} \ldots \overset{\bullet}{+} x}_{n \text{ times}}$ if $n \in \mathbb{N}^*$, and let $0 \cdot x := \theta$. Note, that $2 \cdot x = x \overset{\bullet}{+} x = e_1 \bullet x$ $(x \in \mathbb{I})$ and $2^n \cdot x = e_n \bullet x$ $(x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$.

The $\tilde{\mathbb{S}}$-valued exponential function on $\mathbb{I}$: Recall the base defined in Chapter 3: $b_1 := e \overset{\bullet}{+} e_2,\ b_n := b_{n-1} \bullet b_{n-1}$ $(n \geq 2)$. The difference between the following function and that one presented in Chapter 3 is the domain. Consider $\tilde{\mathbb{S}} := I_2(e \overset{\bullet}{+} e_1)$. Define the $\tilde{\mathbb{S}}$-valued exponential function on $\mathbb{I}$ by: $\zeta(x) := \prod_{j=1}^{\infty} b_j^{x_{j-1}}$ $(x = (x_j, j \in \mathbb{N}) \in \mathbb{I})$.

8.2 2-adic sine and cosine functions

Definition 14 *Define* **the 2-adic cosine and sine function on** $\mathbb{I}$ *as follows:*

$$\cos x := (\zeta(x) \overset{\bullet}{+} \zeta(x^-)) \bullet e_{-1} \qquad (x \in \mathbb{I}),$$
$$\sin x := (\zeta(x) \overset{\bullet}{-} \zeta(x^-)) \bullet e_{-1} \qquad (x \in \mathbb{I}).$$

Definition 15 *To any $n \in \mathbb{N}$ define* **the 2-adic COS_n and SIN_n functions on** $\mathbb{I}$ *as follows:*

$$COS_n(x) := \frac{v_n(x) + v_n(x^-)}{2} \qquad (x \in \mathbb{I}),$$
$$SIN_n(x) := \frac{v_n(x) - v_n(x^-)}{2i} \qquad (x \in \mathbb{I}).$$

Addition formulas for the 2-adic trigonometric functions defined above hold, cos and COS_n are even and sin and SIN_n are odd. Furthermore

$$\cos(x \overset{\bullet}{+} y) \overset{\bullet}{+} \cos(x \overset{\bullet}{-} y) = \cos x \bullet \cos y \bullet e_1.$$
$$COS_n(x \overset{\bullet}{+} y) + COS_n(x \overset{\bullet}{-} y) = COS_n(x) COS_n(y).$$

Thus cos and sine (as COS_n and SIN_n also) satisfy the so-called d'Alembert equation and sine-cosine functional equation investigated in Sahoo[14] and Staetker[44].

As the inverse function of cos is needed in the chosen construction of Chebyshev polynomials, we determine now the set, on which cos is bijective: $\tilde{\mathbb{S}}$, thus we consider its restriction on $\tilde{\mathbb{S}}$, and we determine the range also: $\mathbb{S}^\dagger$.

Notation 1 *Consider the following sets of bytes*

$$\tilde{\mathbb{S}} := I_2(e \overset{\bullet}{+} e_1), \quad \mathbb{S}^\natural := I_3(e) = e \overset{\bullet}{+} \mathbb{I}_3, \quad \mathbb{S}^\dagger := I_6(e \overset{\bullet}{+} e_3 \overset{\bullet}{+} e_5).$$

Theorem 13 *[I. Simon[43]] a) The function* $\cos$ *takes* $\mathbb{S}$ *to* $\mathbb{S}^\dagger$*. Specially,* $\cos : \tilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \to \mathbb{S}^\dagger$ *is a bijection.*
b) The function $\cos$ *takes* $\mathbb{I}$ *to* $\mathbb{S}^\natural$*.*

Notation 2 *Let us denote the inverse of* $\cos : \tilde{\mathbb{S}} \to \mathbb{S}^\dagger$ *by* arccos*, which has domain* $\mathbb{S}^\dagger$*.*

Lemma 4 *[I. Simon[43]]* $f(t) := \cos(e_{-4} \bullet t)$ *is a DMSP-function on* $\tilde{\mathbb{S}_4} = I_6(e_4 \overset{\bullet}{+} e_5)$*, and also on* $\mathbb{S}_4 \setminus \tilde{\mathbb{S}_4} = I_6(e_4)$*.*

Remark: Similarly, $\sin : \mathbb{S} \to I_3(e + e_2)$ is a bijection, and $x \mapsto \sin(x) \bullet e_{-2}$ is a DMSP-function on $\mathbb{S}$.

Theorem 14 *[I. Simon[43]] The systems* $(\sqrt{2}COS_n, n \in \mathbb{N})$*,* $(\sqrt{2}SIN_n, n \in \mathbb{N})$ *are orthogonal and for* $n \in \mathbb{N}^*$ *also orthonormal.*

8.3 The 2-adic Chebyshev polynomials

It seems at first sight to have exaggerated in the following definitions by using k twice, but the first one ensures that the system will be a UDMD product system, and the second one belongs to the nature of Chebyshev polynomials.

Definition 16 *Define* **the 2-adic Chebyshev polynomials of the first kind** *as the product system of* $t_k(x) := v_{2^{k+6}}(\cos[(2k+1)\arccos(x)])$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger, k \in \mathbb{N})$*, that is,*

$$T_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[v_{2^{k+6}}(\cos[(2k+1)\arccos(x)])\right]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{S}^\dagger, n \in \mathbb{N}). \tag{8.1}$$

Definition 17 *Define the 2-adic Chebyshev polynomials of the second kind as the product system of* $u_k(x) := v_{2^{k+3}}(\sin[(2k+1)\arccos(x)])$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger, k \in \mathbb{N})$*, that is*

$$U_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[v_{2^{k+3}}(\sin[(2k+1)\arccos(x)])\right]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{S}^\dagger, n \in \mathbb{N}). \tag{8.2}$$

Lemma 5 *[I. Simon[43]] The functions* $x \mapsto \cos((2n+1)\arccos x)$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger)$ *and* $x \mapsto e_3 \bullet \sin((2n+1)\arccos x)$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger)$ *are DMSP-functions on* $\mathbb{S}^\dagger$ *for any* $n \in \mathbb{Z}$.

Theorem 15 *[I. Simon[43]] The 2-adic Chebyshev polynomials of the first and second kind* $(T_n, n \in \mathbb{N})$ *and* $(U_n, n \in \mathbb{N})$ *are complete and orthonormal systems.*

Consider shift operations:

$$S : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^\dagger,\ S(x) := x \bullet e_6 \overset{\bullet}{+} e \overset{\bullet}{+} e_3 \overset{\bullet}{+} e_5,$$
$$S' : \tilde{\mathbb{S}} \to \mathbb{I},\ S'(x) := [x \overset{\bullet}{-} e \overset{\bullet}{-} e_1] \bullet e_{-2}.$$

Remarks: 1) Like for any UDMD product systems, Fourier series of any $f \in L^p(\mathbb{I})$ $(p > 1)$ with respect to systems $(T_n, n \in \mathbb{N})$ and $(U_n, n \in \mathbb{N})$ converges a.e. to f, which is a consequence of Theorem 4 in Schipp [37]. Furthermore (C,1)-summability of any $f \in L^1(\mathbb{I})$ with respect to these systems also holds, which is a consequence of Theorem 15 in Gát[9] stated for Vilenkin-like systems, a generalization of UDMD product systems.

2) The 2-adic Chebyshev polynomials of the first and second kind can be defined also on $\mathbb{I}$ by using a shift operation:

$$\widetilde{T_n}(x) := \prod_{k=0}^{\infty} [v_{2^{k+6}} (\cos[(2k+1)\arccos(S(x))])]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}),$$
$$\widetilde{U_n}(x) := \prod_{k=0}^{\infty} [v_{2^{k+3}} (\sin[(2k+1)\arccos(S(x))])]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}).$$

Definition 18 *Define the 2-adic Chebyshev polynomials of the third and fourth kind by*

$$\begin{aligned} \overline{T_n}(x) &:= COS_n[S'(\arccos(S(x))] \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}), \\ \overline{U_n}(x) &:= SIN_n[S'(\arccos(S(x))] \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Theorem 16 *[I. Simon[43]] The 2-adic Chebyshev polynomials of the third and fourth kind* $(\overline{T_n}, n \in \mathbb{N}), (\overline{U_n}, n \in \mathbb{N})$ *are orthogonal systems in* $L^2(\mathbb{I})$.

Theorem 17 *[I. Simon[43]] The subsystems* $(\overline{T_{2^n}}, n \in \mathbb{N}), (\overline{U_{2^n}}, n \in \mathbb{N})$ *form UDMD systems on* $\mathbb{I}$.

Chapter 9

Bevezető

Ez a dolgozat négy fő témát ölel fel, melyek a Blaschke függvények két lokálisan kompakt nem-Archimédeszi normált testen értelmezett változatával kapcsolatosak: a 2-adikus (vagy aritmetikai) és a 2-soros (vagy logikai, diadikus) testen. Először a diadikus martingál struktúrát megőrző, azaz DMSP-transzfomációk hatását vizsgáljuk olyan függvényosztályokra, mint az UDMD rendszereké, az $\mathcal{A}_n$-mérhető függvényeké, a diadikus $L^p(\mathbb{I})$, $H^p(\mathbb{I})$ függvényosztályok, illetve a $Lip(\alpha, \mathbb{I})$ Lipschitz-osztály. Majd meghatározzuk a Blaschke csoport karakterrendszerét, majd bevezetjük a diszkrét Laguerre és a Malmquist-Takenaka függvényeket a Blaschke függvények és a megfelelő additív csoportok karakterei segítségével. Ez utóbbi két rendszer UDMD szorzatrendszer és ortonormált, míg a második téma esetén a konstrukcióban fellépő $v_n \circ \gamma$-ról mondhatjuk el ugyanezt. Végül pedig 2-adikus Chebyshev polinomokat konstruálunk különböző 2-adikus trigonometrikus függvény segítségével, melyeket ugyancsak értelmezünk és vizsgálunk. Mindezek kapcsolatosak a diadikus martingál struktúrát megőrző transzformációkkal, hiszen ezek rekurziós előállításainak lényegében azonos a típusa.

A Blaschke függvénnyel vagy általánosabb diadikus martingál struktúrát megőrző függvényekkel és az adott testek karaktereivel kapcsolatos ortogonális rendszerek konstrukcióját és vizsgálatát tartalmazza a mű. Ugyanakkor ez a munka nem vállalkozik a téma teljes leírására. A szorzatrendszerek és UDMD rendszerek módszerét választottuk vizsgálatunkhoz.

Az értekezésben tárgyalt cikkek adatai

A 4. Fejezet a [42] cikken alapul:

Simon, I., *On transformations by dyadic martingale structure preserving functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 39 (2013), pp, 381-390.

A 5. Fejezet a [40] cikken alapul:

Simon, I., *The characters of the Blaschke-group*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 54(3)(2009), pp. 149-160.

A 6. Fejezet a [39] cikken alapul:

Simon, I., *Discrete Laguerre functions on the dyadic fields*, Pure Math. Appl., 17(3-4)(2006), pp. 459-468.

A 7. Fejezet a [41] cikken alapul:

Simon, I. *Malmquist-Takenaka functions on local fields*, Acta Univ. Sapientiae Math., 3(2)(2011), pp. 135-143.

A 8. Fejezet a [43] cikken alapul:

Simon, I. *Construction of 2-adic Chebyshev polynomials*, submitted.

Chapter 10

Algebrai és topológiai struktúra

Ez a fejezet követi a Schipp-Wade[17] kézikönyv ezen értekezésben használt fogalmait és állításait. Feleleveníthük a diadikus/2-soros és 2-adikus testek algebrai és topológiai struktúrájával kapcsolatos definíciókat és tételeket.

$\mathbb{A} := \{0,1\}$ jelölje a *bitek halmazát*, $\mathbb{B} := \{a = (a_j, j \in \mathbb{Z}) \mid a_j \in \mathbb{A}$ és $\lim_{j\to-\infty} a_j = 0\}$ pedig a *bájtok halmazát*. Egy $x \in \mathbb{B}$ bájt *rendje* a következő: ha $x \neq \theta := (0, j \in \mathbb{Z})$, akkor legyen $\pi(x) := n$ pontosan akkor, ha $x_n = 1$ és $x_j = 0$ $(j < n)$, továbbá legyen $\pi(\theta) = +\infty$. Az $\|x\| := 2^{-\pi(x)}$ ha $x \in \mathbb{B} \setminus \{\theta\}$, és $\|\theta\| := 0$ egy nem-Archimédeszi norma, ami egy nem-Archimédeszi metrikához vezet.

Tekintjük a 2-soros/logikai/diadikus és 2-adikus/aritmetikai műveleteket, és megemlítjük, hogy $(\mathbb{B}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ és $(\mathbb{B}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ nem-Archimédeszi normált testek. Tekintjük a diadikus intervallumokat: $\mathbb{I}_n := \{x \in \mathbb{B} : \|x\| \leqq 2^{-n}\}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Legyen $\mathbb{I} := \mathbb{I}_0 = \{a = (a_j, j \in \mathbb{N}) | \ a_j \in \{0,1\}\}$. Ezek meghatároznak egy diadikus martingál struktúrát. Egy μ normalizált Haar mértéket tekintünk, melyre $\mu(\mathbb{I}) = 1$, és áttekintjük az UDMD rendszerek fogalmát, melyet F. Schipp[16] vezetett be, és belátta, hogy $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ pontosan akkor UDMD rendszer, ha

$$\phi_n = r_n g_n, \ g_n \in L(\mathcal{A}_n), \ |g_n| = 1 \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{10.1}$$

A $\psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ egy *UDMD szorzat-rendszer*, ha egy UDMD rendszer által generált szorzat-rendszer, azaz létezik olyan $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ UDMD rendszer, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ bináris kifejtése $m = \sum_{j=0}^{\infty} m_j 2^j$ $(m_j \in \mathbb{A}, j \in \mathbb{N})$, akkor: $\psi_m = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_j^{m_j} \qquad (m \in \mathbb{N})$.

A transzformációs módszer

Ha a karakter-rendszernek egy mértéktartó transzformációja szerinti Fourier sorfejtést vizsgáljuk, akkor ezek részletösszegeit és Cesaro közepeit kifejezhetjük a karakterek szerinti Fourier sor részletösszegei és Cesaro/Fejér közepei segítségével, mely kifejezést összegezhetőségi és konvergencia-vizsgálatoknál alkalmazunk.

Jelölje $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ a vizsgált additív csoport karakter-rendszerét, és legyen $T : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ egy mértéktartó argumentum-transzformáció. Ekkor $\int_{\mathbb{I}} f \circ T \, d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu$.

Definíció 1 *Egy $f \in L^1(\mathbb{I})$ függvény T-Fourier együtthatói, T-Fourier sora, a T-Fourier sor n-edik részletösszege és T-Cesaro közepe alatt a következőket értjük:*

$$\widehat{f^T}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x)\phi_n(T(x))d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$S^T f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^T}(k) \cdot \phi_k \circ T, \quad S_n^T f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^T}(k) \cdot \phi_k \circ T \ (n \in \mathbb{P}),$$

$$\sigma_0^T f := 0 \ \textit{és} \quad \sigma_n^T f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^T f \quad (n \in \mathbb{P}).$$

Állítás 1 *Minden $f \in L^1(\mathbb{I})$, $n \in \mathbb{P}$ esetén fennállnak a következők:*

$$S_n^T f = \left[S_n(f \circ T^{-1})\right] \circ T, \ \textit{és} \tag{10.2}$$

$$\sigma_n^T f = \left[\sigma_n(f \circ T^{-1})\right] \circ T, \tag{10.3}$$

ahol S_n és σ_n az additív csoport $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ karakterei szerinti Fourier sor megfelelő fogalmai.

Megjegyzés: A Bokor-Schipp [3] alapvetően ilyen összefüggéseket is használ a komplex testen skaláris szorzatokkal kifejezve. A vizsgált testeken a fenti állítás szolgált a diszkrét Laguerre és $(v_n \circ \gamma, n \in \mathbb{N})$ rendszerek szerinti Fourier sorok m.m. konvergencia és összegezhetőségi kérdéseinek vizsgálatában. (I. Simon [39] és I. Simon[40].) Schipp Ferenc professzor úr hívta fel a figyelmemet arra, hogy az állítás igaz általánosabban, tehát mértéktartó transzformációkra. Az értekezésben a "transzformációs módszer" elnevezést az egyszerűbb megfogalmazások kedvéért használjuk.

Chapter 11

Néhány hasznos függvény

Ezt a fejezetet a következő vizsgálódásokban használt eszközök bemutatására ill. értelmezésére szenteljük. Előbb bemutatjuk a diadikus és 2-adikus additív csoportok karaktereit a Schipp-Wade [17] kézikönyvben található módon, a szorzat-rendszerek fogalmát használva. Majd az $(\tilde{\mathbb{S}}, \bullet)$-értékű ζ exponenciális függvény bemutatásával folytatjuk. Ezt követi a megfelelő Blaschke függvények értelmezése és tulajdonságai. Ettől kezdve a szerző eredményeit tartalmazza az értekezés.

Az $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+})$ karakterei az $(r_n, n \in \mathbb{N}), r_n(x) := (-1)^{x_n}$ $(x \in \mathbb{I})$ Rademacher függvények szorzatrendszerei, melyeket Walsh-Paley függvényeknek nevezünk: $w_n(x) := (-1)^{\sum_{j=0}^{+\infty} n_j x_j} = \prod_{j=0}^{\infty} r_j(x)^{n_j}$ $(x \in \mathbb{I})$, ahol $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j \in \mathbb{N}$ $(n_j \in \mathbb{A})$.

Legyen $\epsilon(t) := \exp(2\pi i t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+})$ karakter-rendszere, $(v_m, m \in \mathbb{N})$ a $(v_{2^n}(x), n \in \mathbb{N})$ függvények által generált szorzat-rendszer: $v_m(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (v_{2^j}(x))^{m_j}$, ahol $v_{2^n}(x) := \epsilon\left(\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n-1}}{2^2} + \dots\right)$ $(x \in \mathbb{I})$.

Az $\tilde{\mathbb{S}}$-értékű exponenciális függvény $\mathbb{I}_1$-en: Egy 2-adikus exponenciális függvény található a Schipp [17], pp 59-60 könyvben, mellyel lényegében azonos exopnenciális függvényre van szükségünk, de másik bázissal: $b_1 = e \overset{\bullet}{+} e_2$ a $e \overset{\bullet}{+} e_1$ helyett. Legyen $\tilde{\mathbb{S}} := \{x \in \mathbb{S} : x_1 = 0\}$. Az alábbiban a szorzat jele az aritmetikai szorzásra vonatkozik. Tekintsük a kövekező bázist: $b_1 := e \overset{\bullet}{+} e_2$, $b_n := b_{n-1} \bullet b_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Az $(\tilde{\mathbb{S}}, \bullet)$-értékű **exponenciális függvény** az

$\mathbb{I}_1$-en a következőképpen értelmezett:

$$\zeta(x) := \prod_{j=1}^{\infty} b_j^{x_j} \qquad (x = (x_j, j \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{I}_1). \tag{11.1}$$

$\zeta : \mathbb{I}_1 \to \tilde{\mathbb{S}}$ egy folytonos izomorfizmus, továbbá eleget tesz az alábbi függvényegyenletnek:

$$\zeta(x \overset{\bullet}{+} y) = \zeta(x) \bullet \zeta(y) \qquad (x, y \in \mathbb{I}_1). \tag{11.2}$$

A Blaschke függvények

A logikai és aritmetikai Blaschke függvények bevezetése és vizsgálata a Simon[39] és Simon[40] cikkekben található.

Definíció 2 *Az $a \in \mathbb{I}_1$ paraméterű logikai Blaschke függvény $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$-n a következőképpen van értelmezve:*

$$B_a(x) := (x \overset{\circ}{+} a) \circ (e \overset{\circ}{+} a \circ x)^{-1} = \frac{x \overset{\circ}{+} a}{e \overset{\circ}{+} a \circ x} \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{11.3}$$

B_a egy bijekció az $\mathbb{I}$-n és $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{B} \mid \|x\| = 1\}$-en, a B_a inverze önmaga: $B_a^{-1} = B_a$, továbbá mivel

$$B_a(B_b(x)) = B_c(x) \;\; (x \in \mathbb{I}), \text{ ahol } c = \frac{a \overset{\circ}{+} b}{e \overset{\circ}{+} a \circ b} = B_a(b) \in \mathbb{I}_1 \tag{11.4}$$

teljesül minden $a, b \in \mathbb{I}_1$-re, a B_a $(a \in \mathbb{I}_1)$ leképezések egy kommutatív csoportot alkotnak a függvény-kompozícióra nézve, melyben az elemek rendje 2.

Definíció 3 *Az $a \in \mathbb{I}_1$ paraméterű aritmetikai Blaschke függvény $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$-n a következőképpen értelmezett:*

$$B_a(x) := (x \overset{\bullet}{-} a) \bullet (e \overset{\bullet}{-} a \bullet x)^{-1} = \frac{x \overset{\bullet}{-} a}{e \overset{\bullet}{-} a \bullet x} \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{11.5}$$

Belátjuk, hogy ez a függvény jól értelmezett.

Állítás 2 *$B_a : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ egy bijekció minden $a \in \mathbb{I}_1$ esetén az $\mathbb{I}$-n és $\mathbb{S}$-en is.*

Az inverz függvénye: $B_a^{-1} = B_{a^-}$. Két Blaschke függvény kompozíciója is Blaschke függvény:

$$B_a \circ B_b = B_c, \quad \text{ahol } c = \frac{a \overset{\bullet}{+} b}{e \overset{\bullet}{+} a \bullet b} \in \mathbb{I}_1 \quad (a, b \in \mathbb{I}_1), \tag{11.6}$$

mely a $a \triangleleft b := \frac{a \overset{\bullet}{+} b}{e \overset{\bullet}{+} a \bullet b} \in \mathbb{I}_1 \quad (a, b \in \mathbb{I}_1)$ jelöléssel azt jelenti, hogy $B_a \circ B_b = B_{a \triangleleft b}$ $(a, b \in \mathbb{I}_1)$. Ezért a B_a $(a \in \mathbb{I}_1)$ leképezések egy kommutatív csoportot alkotnak a függvény-kompozícióra nézve.

Definíció 4 *Az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ testen tekintett Blaschke csoport alatt a $(\mathcal{B}, \circ)$ struktúrát értjük, ahol*

$$\mathcal{B} := \{B_a, a \in \mathbb{I}_1\} \tag{11.7}$$

és $\circ$ függvénykompozíciót jelöl.

Állítás 3 *[I. Simon[39]] Adott $x \in \mathbb{I}, a \in \mathbb{I}_1$ esetén a $y = B_a(x)$ bájt mindkét tekintett testen az alábbi* **rekurziós alakkal rendelkezik:**

$$y_n = x_n + a_n + f_n(x_0, \cdots, x_{n-1}) \quad (mod\ 2) \tag{11.8}$$

ahol az $f_n : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ függvények az a paramétertől is függnek.

Chapter 12

Diadikus martingál struktúrát megőrző transzformációk

Ez a fejezet az I. Simon[42]-en alapul és a diadikus martingál struktúrát megőrző transzformációk hatását vizsgálja speciális függvényosztályokra vagy függvény-rendszerekre. Kiderült, hogy a DMSP-függvényekkel való kompozívió megőrzi az UDMD rendszerek osztályát, az $\mathcal{A}_n$-mérhető függvények terét, az $L^p(\mathbb{I})$, $H^p(\mathbb{I})$ diadikus függvény-osztályokat és a Lipschitz-függvények $Lip(\alpha, \mathbb{I})$ osztályát. Ezután néhány példát adunk DMSP-függvényre, megemlítve többek között a Blaschke függvényeket.

Definíció 5 *Azt mondjuk, hogy $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ egy diadikus martingál struktúrát megőrző függvény, vagy röviden DMSP-transzformáció, ha bijekciók $(\vartheta_n, n \in \mathbb{N})$, $\vartheta_n : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ rendszere és egy tetszőleges $(\eta_n, n \in \mathbb{N}^*)$, $\eta_n : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$ rendszer generálja a következőképpen:*

$$\begin{aligned}
&(B(x))_0 := \vartheta_0(x_0),\\
&(B(x))_n := \vartheta_n(x_n) + \eta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \pmod 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*).
\end{aligned}$$

A DMSP-transzformáció fogalma többnyire a függvényre vonatkozik, de időnként a vele való kompozíciót tekintjük, ami a szövegösszefüggésből egyértelműen kiderül.

Állítás 4 *Minden, a definició szerint meghatározott* $(\vartheta_n, n \in \mathbb{N})$ *és* $(\eta_n, n \in \mathbb{N}^*)$ *generátor-rendszerből származó DMSP-transzformáció egy bijekció* $\mathbb{I}$*-n, és inverz függvénye is DMSP-transzformáció.*

Állítás 5 *DMSP-transzformációk kompozíciója is DMSP-transzformáció.*

Mely függvény-rendszerek DMSP-transzformáltja eredményez UDMD rendszert? Látni fogjuk, hogy pontosan az UDMD rendszereké. Ehhez szükséges az alábbi segédtétel:

Lemma 6 *[I. Simon[42]] a) Legyen* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *egy DMSP-transzformáció. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\exists h_n \in L(\mathcal{A}_n), |h_n| = 1 \text{ úgy, hogy } r_n \circ B = r_n \cdot h_n. \tag{12.1}$$

b) Az $\mathcal{A}_n$*-mérhető függvények* $L(\mathcal{A}_n)$ *tere invariáns a DMSP-transzformációval szemben.*

Tétel 1 *[I. Simon[42]] Legyyen* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *egy DMSP-transzformáció. Az* $(f_n, n \in \mathbb{N})$ *akkor és csak akkor UDMD rendszer* $\mathbb{I}$*-n, ha* $(f_n \circ B, n \in \mathbb{N})$ *is UDMD rendszer* $\mathbb{I}$*-n.*

Tétel 2 *[I. Simon[43]] Legyen* $(B_n : \mathbb{I} \to \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$ *DMSP-transzformációk egy rendszere. Az* $(f_n, n \in \mathbb{N})$ *akkor és csak akkor UDMD rendszer* $\mathbb{I}$*-n, ha* $(f_n \circ B_n, n \in \mathbb{N})$ *is UDMD rendszer* $\mathbb{I}$*-n.*

Mivel a DMSP-transzformációk megőrzik az UDMD rendszerek osztályát, a 2. Fejezetben bemutatott transzformációs módszerből következik, hogy az eredeti karakter-rendszerek szerinti Fourier sorok m.m. konvergenciájára és $(C, 1)$-szummációjára vonatkozó tételek is megőrződnek DMSP-transzformáció során.

Az $L^p(\mathbb{I})$ $(0 < p \leq \infty)$ és $H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p < \infty)$ függvény-osztályok DMSP-transzformációval szembeni invarianciájának vizsgálatához szükséges, hogy ez a transzformáció mértéktartó legyen.

Lemma 7 *[I. Simon[42]] Legyen* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *egy DMSP-transzformáció és* $n \in \mathbb{N}$*. Ekkor*

$$B(I_n(x)) = I_n(B(x)) \qquad (x \in \mathbb{I}). \tag{12.2}$$

Állítás 6 *[I. Simon[42]] Bármely* $B : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *DMSP-transzformáció mértéktartó, így*

$$\int_{\mathbb{I}} f \circ B \; d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu \qquad (f \in L^1(\mathbb{I})). \tag{12.3}$$

Tétel 3 *[I. Simon[42]] Bármely B DMSP-transzformáció megőrzi az* $L^p(\mathbb{I})(0 < p \leq \infty)$*-t és a* $H^p(\mathbb{I})$ $(0 < p < \infty)$ *diadikus Hardy teret. Továbbá,*

$$\|f \circ B\|_p = \|f\|_p \; (0 < p \leq \infty), \tag{12.4}$$

$$\|f \circ B\|_{H^p} = \|f\|_{H^p} \; (0 < p < \infty). \tag{12.5}$$

Megjegyzés 2. Következésképpen,

$$\|f \circ B\|_{BMO} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \left(\mathcal{E}_n |f - \mathcal{E}_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \circ B\|_\infty = \|f\|_{BMO}.$$

Ezért a korlátos diadikus közép oszcillációjú függvények BMO tere és a eltűnő diadikus közép oszcillációjú függvények VMO tere is megőrződik DMSP-transzformációk során.

Emlékeztetőül: $\alpha > 0$ esetén a $Lip(\alpha, \mathbb{B})$ függvényosztály olyan $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza, melyekre fennáll, hogy

$$|f(y) - f(x)| \leq c \; \rho(x,y)^\alpha \quad (x, y \in \mathbb{B})$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal, mely f-hez tartozik.

Tétel 4 *[I. Simon[42]] A DMSP-transzformációk megőrzik a* $Lip(\alpha, \mathbb{I})$ $(\alpha > 0)$ *teret.*

Példák DMSP-függvényekre:

Megemlítünk néhány DMSP-függvényt a $(\mathbb{B}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ és $(\mathbb{B}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ testen: a transzlációt, a dilatációt, a reciprok-képzést, a ζ egy általánosítását és a Blaschke függvényeket.

Chapter 13

A Blaschke csoport karakterei

Ebben a fejezetben az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ test $(\mathcal{B}, \circ)$ Blaschke csoportjáról belátjuk, hogy topológikus csoport és meghatározzuk a karaktereit. Majd egy rekurzió meghatározása után összegezhetőségi és konvergencia kérdéseket tárgyalunk. Ez a fejezet a Simon[40] cikken alapul.

13.1 A Blaschke csoport karaktereinek konstrukciója

Miután az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ test $(\mathcal{B}, \circ)$ Blaschke csoportjáról belátjuk, hogy topológikus csoport, rátérünk a karakterek meghatározására. A $B_a \circ B_b = B_{a \triangleleft b}$ kompozíció által meghatározott $x \triangleleft y := \frac{x \overset{\bullet}{+} y}{e \overset{\bullet}{+} x \bullet y}$ $(x, y \in \mathbb{I}_1)$ művelet a tangens függvény függvényegyenletéhez vezet. Ez képezi a konstrukció alapötletét, melynek következtében a 2-adikus test Blaschke csoportjának karaktereit tangens-szerű függvények segítségével állítjuk elő.

A $B : (\mathbb{I}_1, \triangleleft) \to (\mathcal{B}, \circ)$, $a \mapsto B_a$ leképezés egy folytonos izomorfizmus, ezért a $(\mathcal{B}, \circ)$ karakter-rendszerének meghatározásához elegendő az $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$ karakterrendszerét meghatározni. Ugyanakkor az $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+})$ karaktereit már ismerjük: $(v_n, n \in \mathbb{N})$.

Ezért most a célunk megadni egy folytonos izomorfizmust az $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+})$-ről az $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$-re, vagyis egy olyan γ függvényt, mely eleget tesz a következő egyenletnek:

$$\gamma(x \overset{\bullet}{+} y) = \frac{\gamma(x) \overset{\bullet}{+} \gamma(y)}{e \overset{\bullet}{+} \gamma(x) \bullet \gamma(y)} \quad (x, y \in \mathbb{I}_1).$$

Ez az út úgy tekinthető, mint a tan függvény függvény-egyenletének megoldása a vizsgált lokális testen.

Definíció 6 *A tangens-szerű γ függvényt a következőképpen értelmezzük $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+}$ $)$-en:*

$$\gamma(x) := \frac{\zeta(x) \overset{\bullet}{-} e}{\zeta(x) \overset{\bullet}{+} e} \quad (x \in \mathbb{I}_1). \tag{13.1}$$

Az alábbi segédtétel a továbbiakhoz szükséges állításokat tartalmazza:

Lemma 8 *[I. Simon[40]] Minden $a, b \in \mathbb{B}, x \in \mathbb{I}_1$ és $y \in \mathbb{I}_1$ esetén:*

$$i)\ a \overset{\bullet}{+} a = e_1 \bullet a \qquad iii)\ \zeta^2(x) = \zeta(e_1 \bullet x)$$

$$ii)\ \frac{a \overset{\bullet}{+} a}{b \overset{\bullet}{+} b} = \frac{a}{b} \qquad iv)\ \frac{e \overset{\bullet}{+} y}{e \overset{\bullet}{-} y} \in \tilde{\mathbb{S}}.$$

Lemma 8 *iii)* szerint a γ tangens-szerű függvény fogalma közel áll a tan-hoz: $\gamma(x) = \tan(e_{-1} \bullet x)$ $(x \in \mathbb{I}_1)$.

Tétel 5 *[I. Simon[40]] Az (13.1)-ben értelmezett γ függvény egy folytonos izomorfizmus $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+})$-ről $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$-re.*

Tétel 6 *[I. Simon[40]] Az $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$ csoport karakterei a következők:*

$$v_n \circ \gamma^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Következmény 1 *[I. Simon[40]] A $(\mathcal{B}, \circ)$ Blaschke csoport karakterei a következők:*

$$v_n \circ \gamma^{-1} \circ B^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol $(\mathcal{B}, \circ)$ az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ aritmetikai test Blaschke csoportja, és $B : (\mathbb{I}_1, \triangleleft) \to (\mathcal{B}, \circ)$ a következő függvény: $a \mapsto B_a$.

13.2 Rekurzió

Megmutatjuk, hogy $\gamma(x)$ rekurzióval számolható x-ből, és ezért:

Állítás 7 *[I. Simon[40]] A $v_n \circ \gamma^{-1} (n \in \mathbb{N})$ függvények, az $(\mathbb{I}_1, \triangleleft)$ csoport karakterei UDMD szorzatrendszert alkotnak.*

Mivel $(v_n \circ \gamma^{-1}, n \in \mathbb{N})$ egy UDMD szorzatrendszer, ezen rendszer szerinti diszkrét Fourier együtthatók a Gyors Fourier Algoritmussal (FFT) számolhatók. Az FFT algoritmusról szóló részletekről bővebben: Schipp-Wade[17], pp. 106-111.

13.3 Gamma-Fourier sorok (C,1)-összegezhetősége és m.m. konvergenciája

A rekurziós előállításának következtében γ egy bijekció $I_n(x)$-en, továbbá $\gamma(I_n(x)) = I_n(\gamma(x))$ $(x \in \mathbb{I}_1, n \in \mathbb{N})$, ezért a γ argumentum-transzformáció mértéktartó. Ez következik abból is, hogy γ egy DMSP-transformáció a 4. Fejezetben bemutatott fogalommal. Így,

$$\int_{\mathbb{I}_1} f \circ \gamma \, d\mu = \int_{\mathbb{I}_1} f \, d\mu. \tag{13.2}$$

Definíció 7 *Egy $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$ függvény $(v_m \circ \gamma^{-1}, m \in \mathbb{N})$ rendszerre vonatkozó Gamma-Fourier együtthatóit, Gamma-Fourier sorát, illetve annak n-edik részletösszegét a következőképpen értelmezzük:*

$$\widehat{f^{\gamma}}(m) := \int_{\mathbb{I}_1} f(x) v_m(\gamma^{-1}(x)) d\mu(x) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$$S^{\gamma} f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^{\gamma}}(k) \cdot v_k \circ \gamma^{-1},$$

$$S_n^{\gamma} f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^{\gamma}}(k) \cdot v_k \circ \gamma^{-1} \ (n \in \mathbb{P})$$

Értelmezzük az $S^{\gamma} f$ Gamma-Cesaro (vagy $(G-C, 1)$) közepét a következőképpen: $\sigma_0 f := 0$ és

$$\sigma_n^{\gamma} f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^{\gamma} f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

A Carleson-Hunt tétel egy $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ függvény Fourier sorának m.m konvergenciájáról, illetve a Lebesguenek az $f \in L^1(\mathbb{R})$ (C,1)-összegezhetőségéről szóló tételének megfelelői érvényesek az $f \in L^p(\mathbb{I}_1)$ $(p > 1)$ illetve $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$ Gamma-Fourier soraira. Az előbbi eredmény Schipp Fe renc egy általános tételének ([37], 4.Tétel) következménye, mely egy $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ tetszőleges UDMD rendszer szerinti Fourier sorának m.m. konvergenciájáról szól. A második megfelelő állítás Gát György Vilenkin-szerű rendszerekre, UDMD rendszerek általánosításaira vonatkozó tétel ([9], 15 Tétel) következménye. Ugyanakkor ezen tételek adódnak közvetlenül a $(v_n, n \in \mathbb{N})$ karakter-rendszer szerinti Fourier sorokra kimondott tételekből is a 10. Fejezetben bemutatott transzformációs módszer segítségével.

Tétel 7 *Az* $(\mathbb{I}_1, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *testen fennállnak az alábbiak:*

$$a)\ S_n^\gamma f \to f \ \text{m.m., amint } n \to \infty \ (f \in L^p(\mathbb{I}_1),\ p > 1);$$
$$b)\ \sigma_n^\gamma f \to f \ \text{m.m, amint } n \to \infty \ (f \in L^1(\mathbb{I}_1)).$$

Megjegyzés 4. Mivel $v_n \circ \gamma$ egy UDMD szorzat rendszer, az UDMD rendszerekre és Vilenkin-szerű rendszerekre fennálló általános tételek biztosítják a $(v_m \circ \gamma^{-1}, m \in \mathbb{N})$ rendszerre vonatkozó Fourier sorok norma konvergenciáját:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^\gamma f - f\|_q = 0,\ \ (f \in L^q(\mathbb{I}_1), (1 \le q < \infty) \tag{13.3}$$
$$\lim_{m\to\infty} \|S_m^\gamma f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}_1)), (1 < q < \infty) \tag{13.4}$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^\gamma f - f\|_q = 0,\ \ (f \in L^1(\mathbb{I}_1). \tag{13.5}$$

Továbbá, (13.4) és (13.5) fennáll $q = \infty$-re is, ha f folytonos $\mathbb{I}$-n.

Chapter 14

Diszkrét Laguerre függvények lokális testeken

14.1 Bevezető

Ez a fejezet diszkrét Laguerre függvények konstrukcióját tartalmazza mindkét lokális testen. A klasszikus rendszerben szereplő hatványfüggvény szerepét a megfelelő test additív karakterei veszik át, melyek Blaschke függvényekkel tekintett összetétele alkotja a diadikus diszkrét Laguerre rendszereket. A 3 Fejezetben látottak szerint a B_a Blaschke függvények bitjei rekurzióval számolhatók. Következésképpen a vizsgált rendszerek UDMD szorzatrendszerek. Így az azokra érvényes eredmények itt is fennállnak. Ezen rendszerek szernti Fourier sork (C,1)-összegezhetősége és m.m. konvergenciája a Schipp[15] és Gát[7] karakterek szerinti Fourier sorok hasonló kérdéseiről szóló tételek következménye, melyet a transzformációs módszer eszközével láttunk be.

14.2 Diszkrét Laguerre függvények a diadikus/2-soros/logikai testen

Definíció 8 *Az $a \in \mathbb{I}_1$ paraméterű B_a-hoz tartozó logikai diszkrét Laguerre függvényeket a következőképpen értelmezzük:*

$$L_k^{(a)}(x) := w_k(B_a(x)) \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}). \tag{14.1}$$

Az $a \in \mathbb{I}_1$ esetén tekintsük az $r_n \circ B_a \quad (x \in \mathbb{I},\ n \in \mathbb{N})$ függvényeket. (Itt $\circ$ függvény-kompozíciót jelent.) Ekkor $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ az $(r_n \circ B_a, n \in \mathbb{N})$ által generált szorzatrendszer:

$$L_k^{(a)}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [r_n(B_a(x))]^{k_n} \qquad (x \in \mathbb{I}).$$

Tétel 8 *[I. Simon[39]] Minden $a \in \mathbb{I}_1$ esetén az $(r_n \circ B_a,\ n \in \mathbb{N})$ egy UDMD rendszert alkot $\mathbb{I}$-n.*

Következmény 2 *[I. Simon[39]] Az $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ logikai diszkrét Laguerre rendszer az $(r_n \circ B_a, n \in \mathbb{N})$ által generált UDMD szorzatrendszer, következésképpen teljes ortonormált rendszert alkot.*

14.3 A 2-adikus diszkrét Laguerre függvények

Definíció 9 *Az $a \in \mathbb{I}_1$ paraméterű B_a-hoz tartozó aritmetikai diszkrét Laguerre függvényeket a következőképpen értelmezzük:*

$$L_k^{(a)}(x) := v_k(B_a(x)) \qquad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{I}). \tag{14.2}$$

Az $a \in \mathbb{I}_1$ paraméterek és $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük a $v_{2^n} \circ B_a$ függvényeket $\mathbb{I}$-n. Ekkor $(L_k^{(a)}, k \in \mathbb{N})$ a $(v_{2^n} \circ B_a, n \in \mathbb{N})$ által generált szorzatrendszer:

$$L_k^{(a)}(x) = \prod_{j=0}^{+\infty} [v_{2^j}(B_a(x))]^{k_j} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Tétel 9 *[I. Simon[39]] Minden $a \in \mathbb{I}_1$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $v_{2^n} \circ B_a$ függvények UDMD rendszert alkotnak $\mathbb{I}$-n.*

Következmény 3 *[I. Simon[39]] Az $(L_m^{(a)}, m \in \mathbb{N})$ aritmetikai diszkrét Laguerre rendszer a $(v_{2^n} \circ B_a, n \in \mathbb{N})$ által generált UDMD szorzatrendszer, következésképpen teljes ortonormált rendszert alkot.*

14.4 Laguerre-Fourier sorok (C,1)-összegezhetősége és m.m. konvergenciája

Ebben a részfejezetben B_a és $L_n^{(a)}$ jelöli a megfelelő Blaschke függvényt és diszkrét Laguerre függvényt az $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ ill. $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ testen, és $a \in \mathbb{I}_1$. A $T : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, $T(x) := B_a(x)$ argumentum-transzformáció mértéktartó, így

$$\int_{\mathbb{I}} f \circ B_a \, d\mu = \int_{\mathbb{I}} f d\mu. \tag{14.3}$$

Definíció 10 *Egy* $f \in L^1(\mathbb{I})$ *függvény* $(L_n^{(a)}, n \in \mathbb{N})$ *rendszerre vonatkozó Laguerre-Fourier együtthatóit, Laguerre-Fourier sorát, illetve annak* n*-edik részletösszegét a következőképpen értelmezzük:*

$$\widehat{f^{(a)}}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x) L_n^{(a)}(x) d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$S^{(a)} f := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f^{(a)}}(k) L_k^{(a)},$$

$$S_n^{(a)} f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^{(a)}}(k) L_k^{(a)} \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

Értelmezzük az $S^{(a)} f$ *Laguerre-Cesaro (vagy* $(L-C,1)$*) közepét a következőképpen:* $\sigma_0^{(a)} f := 0$ *és*

$$\sigma_n^{(a)} f := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k^{(a)} f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

A Carleson-Hunt tétel egy $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ függvény Fourier sorának m.m konvergenciájáról, illetve a Lebesguenek az $f \in L^1(\mathbb{R})$ (C,1)-összegezhetőségéről szóló tételének megfelelői érvényesek az $f \in L^p(\mathbb{I}_1)$ $(p > 1)$ illetve $f \in L^1(\mathbb{I}_1)$ Laguerre-Fourier soraira. Az előbbi eredmény Schipp Ferenc egy általános tételének ([37], 4.Tétel) következménye, mely egy $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ tetszőleges UDMD rendszer szerinti Fourier sorának m.m. konvergenciájáról szól. A második megfelelő állítás Gát György Vilenkin-szerű rendszerekre, UDMD rendszerek általánosításaira vonatkozó tételének ([9], 15. Tétel) következménye. Ugyanakkor ezen tételek adódnak közvetlenül a $(w_n, n \in \mathbb{N})$ ill. $(v_n, n \in \mathbb{N})$ karakter-rendszer szerinti Fourier sorokra kimondott tételekből is a 10. Fejezetben bemutatott transzformációs módszer segítségével.

Tétel 10 *A* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ *és* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *lokális testek mindegyikén teljesül, hogy*

a) $S_n^{(a)} f \to f$ *m.m., amint* $n \to \infty$ $(f \in L^p(\mathbb{I}), p > 1)$;

b) $\sigma_n^{(a)} f \to f$ *m.m., amint* $n \to \infty$ $(f \in L^1(\mathbb{I}))$.

Megjegyzés 5. Mivel az $(L_n^{(a)}, n \in \mathbb{N})$ diszkrét Laguerre rendszerek UDMD szorzatrendszerek, ezért a szerintük vett Fourier sorokra norma konvergencia teljesül:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^{(a)} f - f\|_q = 0,\ \ (f \in L^q(\mathbb{I}), (1 \le q < \infty) \tag{14.4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m^{(a)} f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I})), (1 < q < \infty) \tag{14.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^{(a)} f - f\|_q = 0,\ \ (f \in L^1(\mathbb{I})). \tag{14.6}$$

Továbbá, (14.5) és (14.6) fennáll a $q = \infty$ esetre is, ha f folytonos $\mathbb{I}$-n.

Chapter 15

Malmquist-Takenaka függvények

A komplex testen értelmezett Malmquist-Takenaka rendszerek fontos szerepet játszanak a jelfeldolgozásban. Ebben a fejezetben ezen függvények analogonjainak konstrukciója szerepel a két vizsgált lokális testen azok additív karaktereinek generátorrendszere és a Blaschke függvények segítségével. Ily módon UDMD szorzatrendszerekhez jutunk, melyek a diszkrét Laguerre rendszerek általánosításai. Ezt az értelmezett Malmquist-Takenaka rendszerek Fourier sorának vizsgálata követi. Ez a fejezet a Simon [41] cikken alapul.

15.1 Malmquist-Takenaka rendszerek a diadikus és aritmetikai testen

Definíció 11 *Adott* $(a_i \in \mathbb{I}_1, i \in \mathbb{N})$ *bájtsorozat esetén a* $p = (a_0, a_1, \ldots)$ *paraméterű* $(\psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ *Malmquist-Takenaka függvényeket az* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$*-n értelmezzük a következő rendszer szorzatrendszereként:*

$$(\varphi_{n,a_n} := r_n \circ B_{a_n}, n \in \mathbb{N}). \tag{15.1}$$

Pontosabban, $\psi_k^{(p)}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [r_n(B_{a_n}(x))]^{k_n} \quad (x \in \mathbb{I})$.

Megjegyzés 6. Az $y = B_{a_m}(x)$ bájt az $y_n = x_n + f_n^m(x_0, \ldots, x_{n-1})$ előállításban, a (11.8)-ben bemutatott rekurziós előállításában, az $f_n^m : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$

függvények az $a_m \in \mathbb{I}_1$ paraméterekhez tartoznak. Mivel itt különböző a_m bájtokat használunk a konstrukcióhoz, felső index jelzi a paramétert. Most mindezen függvényekből:

$$\begin{array}{rcccccc} a_1\text{-hez tartozó}: & f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 & \dots \\ a_2\text{-hez tartozó}: & f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_m\text{-hez tartozó}: & f_1^m & f_2^m & \dots & f_n^m & \dots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

a főátló elemeit fogjuk használni, az f_n^n-eket, mint a Cantor-féle átlós eljárásban.

Tétel 11 *[I. Simon[41]] Tetszőleges* $(a_i \in \mathbb{I}_1, i \in \mathbb{N})$ *paraméter-sorozatra a (15.1)-beli* $(\varphi_{n,a_n},\ n \in \mathbb{N})$ *függvények UDMD rendszert alkotnak* $\mathbb{I}$*-n.*

Következmény 4 *[I. Simon[41]] A* $(\psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ *logikai Malmquist-Takenaka rendszer UDMD szorzatrendszer, következésképpen teljes ortonormált rendszer* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$*-n.*

Definíció 12 *Értelmezzük a* $p = (a_0, a_1, \dots)$ $(a_n \in \mathbb{I}_1, n \in \mathbb{N})$ *paraméterű aritmetikai Malmquist-Takenaka függvények* $\left(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N}\right)$ *rendszerét az* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *2-adikus testen a következőképpen: legyen* $\left(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N}\right)$ *a*

$$(\Phi_{n,a_n} := v_{2^n} \circ B_{a_n}, n \in \mathbb{N})\,. \tag{15.2}$$

függvények által generált szorzatrendszer.

Pontosabban, $\Psi_n^{(p)}(x) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[v_{2^j}(B_{a_j}(x))\right]^{n_j} \quad (x \in (\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet))$.

Tétel 12 *[I. Simon[41]] Tetszőleges* $(a_n \in \mathbb{I}_1,\ n \in \mathbb{N})$ *paraméter-sorozat esetén a (15.2)-ben értelmezett* $(\Phi_{n,a_n},\ n \in \mathbb{N})$ *egy UDMD rendszer az* $\mathbb{I}$*-n.*

Következmény 5 *[I. Simon[41]] A* $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ *aritmetikai Malmquist-Takenaka függvények UDMD szorzat-rendszert alkotnak, mely következésképpen teljes ortonormált rendszer* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$*-n.*

Állítás 8 *Speciálisan, azonos* $a_n = a \in \mathbb{I}_1 \quad (n \in \mathbb{N})$ *paraméterek esetén a* $\Psi_n^{(p)}(x)$ *Malmquist-Takenaka függvények éppen az* $L_n^{(a)}(x)$ *diszkrét Laguerre függvények az* $(\mathbb{I}, \overset{\bullet}{+}, \bullet)$ *és* $(\mathbb{I}, \overset{\circ}{+}, \circ)$ *testeken.*

Nyilvánvalóan, az $a_n = \theta$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén ez a rendszer nem más, mint a megfelelő test additív karakter-rendszere. A Malmquist-Takenaka rendszerek tehát mind a diszkrét Laguerre, mind pedig a karakter-rendszer általánosításai.

15.2 Összegezhetőségi és konvergencia kérdések

Most jelölje $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ a Malmquist-Takenaka rendszert a megfelelő testen, tehát ebben a részben egyszerre tárgyaljuk a két különböző testre értelmezett fogalmakat.

Definíció 13 *Tekintsük az* $a_n \in \mathbb{I}_1 (n \in \mathbb{N})$ *bájtok által alkotott* $p = (a_0, a_1, \ldots)$ *paraméter-sorozatot. Egy* $f \in L^1(\mathbb{I})$ *függvény* p*-hez tartozó Malmquist-Takenaka-Fourier együtthatói, Malmquist-Takenaka-Fourier sorának* n*-edik részletösszegei és Malmquist-Takenaka-Cesaro (vagy* $MT-(C,1)$*) közepeit a következőképpen értelmezzük:*

$$\widehat{f^{(p)}}(n) := \int_{\mathbb{I}} f(x)\Psi_n^{(p)}(x)d\mu(x) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$S_n^{(p)} f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f^{(p)}}(k)\Psi_k^{(p)} \ (n \in \mathbb{P}),$$

$$\sigma_0^{(p)} f := 0 \ and \ \sigma_n^{(p)} f := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k^{(p)} f \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

UDMD szorzat-rendszerek tulajdonságai fennállnak a megfelelő testeken értelmezett $(\Psi_k^{(p)}, k \in \mathbb{N})$ Malmquist-Takenaka rendszerekre, ezért konvergenciáról és összegezhetőségről szóló Schipp [37](Tétel 4) és Gát[9](Tétel 15) általános tételek alapján fennáll az alábbi:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{2^n}^{(p)} f - f\|_q = 0,\ (f \in L^q(\mathbb{I}), 1 \leq q < \infty), \tag{15.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m^{(p)} f - f\|_q = 0, (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}), 1 < q < \infty), \tag{15.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^{(p)} f - f\|_q = 0,\ (f \in L^1(\mathbb{I})), \tag{15.5}$$

$$S_{2^n}^{(p)} f \to f \qquad m.m. \qquad (f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{I})), \tag{15.6}$$

$$S_m^{(p)} f \to f \qquad m.m. \qquad (f \in \mathbb{L}^q(\mathbb{I}), q > 1), \tag{15.7}$$

$$\sigma_n^{(p)} f \to f \qquad m.m. \qquad (f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{I})). \tag{15.8}$$

Továbbá, (15.4) és (15.5) fennáll $q = \infty$ esetén is, ha f folytonos $\mathbb{I}$-n. A (15.6) fennáll m.m. és f minden folytonossági pontjában.

Chapter 16

2-adikus Chebyshev polinomok konstrukciója

16.1 Bevezető

A fejezet a [43]-on alapul. A klasszikus Chebyshev polinomok fontos szerepet játszanak például az approximáció-elméletben. Az első- és másodrendű klasszikus Chebyshev polinomok a trigonometrikus függvények segítségével is kifejezhetők:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);\ U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sin(\arccos x)}\ (x \in [-1,1],\ n \geq 0),$$

ahol a cos és sin függvények megadhatók az exponenciális függvényekkel: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ és $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Az első- és másodfajú Chebyshev polinomok ortogonális rendszert alkotnak bizonyos súlyfüggvényekre nézve.

Ebben a fejezetben a Chebyshev polinomok 2-adikus analogonjainak konstrukciója található különböző szinusz és koszinusz függvényekkel kifejezve. Két lehetőséget mutatunk be 2-adikus trigonometrikus függvények konstrukciójára: a $(v_n, n \in \mathbb{N})$ additív karakterek, illetve az $\tilde{\mathbb{S}}$-értékű exponenciális függvények segítségével, mely kapcsolatban áll a multiplikatív karakterekkel. Ily módon előbb a $(v_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer két DMSP-transzformációját kapjuk, mely UDMD szorzat-rendszert alkot, így teljes ortonormált rendszer. Ezt olyan Chebyshev polinomok konstrukciója követi, melyek ugyancsak ortogonális rendszert alkotnak.

Egy $x \in I$ bájt esetén jelölje $n \cdot x := \underbrace{x \overset{\bullet}{+} x \overset{\bullet}{+} \ldots \overset{\bullet}{+} x}_{n\text{-szer}}$ ha $n \in \mathbb{N}^*$, és legyen $0 \cdot x := \theta$.

Az $\tilde{\mathbb{S}}$-értékű exponenciális függvény $\mathbb{I}$-n: Emlékeztetünk a 3. Fejezetben bemutatott bázisra: $b_1 := e \overset{\bullet}{+} e_2$, $b_n := b_{n-1} \bullet b_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Az alábbi függvény és a 3. Fejezetben értelmezett között pusztán az értelmezési tartomány különbözik. Legyen $\tilde{\mathbb{S}} := I_2(e \overset{\bullet}{+} e_1)$. Az $\tilde{\mathbb{S}}$-értékű exponenciális függvényt a következőképpen értelmezzük $\mathbb{I}$-n: $\zeta(x) := \prod_{j=1}^{\infty} b_j^{x_{j-1}}$ $(x = (x_j, j \in \mathbb{N}) \in \mathbb{I})$.

16.2 2-adikus szinusz és koszinusz függvények

Definíció 14 *A* **2-adikus koszinusz és szinusz** *függvényeket a következőképpen értelmezzük $\mathbb{I}$-n:*

$$\cos x := (\zeta(x) \overset{\bullet}{+} \zeta(x^-)) \bullet e_{-1} \qquad (x \in \mathbb{I}),$$
$$\sin x := (\zeta(x) \overset{\bullet}{-} \zeta(x^-)) \bullet e_{-1} \qquad (x \in \mathbb{I}).$$

Definíció 15 *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a* **2-adikus** COS_n **és** SIN_n *függvényeket az $\mathbb{I}$-n a következőképpen:*

$$COS_n(x) := \frac{v_n(x) + v_n(x^-)}{2} \qquad (x \in \mathbb{I}),$$
$$SIN_n(x) := \frac{v_n(x) - v_n(x^-)}{2i} \qquad (x \in \mathbb{I}).$$

Addíciós formulák teljesülnek a fent értelmezett 2-adikus trigonometrikus függvényekre, továbbá cos és COS_n páros függvények, sin és SIN_n pedig páratlanok. Továbbá

$$\cos(x \overset{\bullet}{+} y) \overset{\bullet}{+} \cos(x \overset{\bullet}{-} y) = \cos x \bullet \cos y \bullet e_1.$$
$$COS_n(x \overset{\bullet}{+} y) + COS_n(x \overset{\bullet}{-} y) = COS_n(x)COS_n(y).$$

Ezért a cos és sin (illetve COS_n és SIN_n) függvények eleget tesznek az úgynevezett d'Alembert -féle függvényegyenletnek és a szinusz-koszinusz függvényegyenletnek, melyeket többek között Sahoo[14] és Staetker[44] vizsgálták.

Mivel a cos függvény inverzére van szükségünk a Chebyshev polinomok választott konstrukcióiban, meghatározzuk az $\mathbb{I}$ legbővebb részhalmazait, melyeken a cos függvény bijektív: $\tilde{\mathbb{S}}$ és $\mathbb{S} \setminus \tilde{\mathbb{S}}$. A cos függvény $\tilde{\mathbb{S}}$-ra való leszűkítésének meghatározzuk a képtartományát is: $\mathbb{S}^\dagger$.

Tekintsük a bájtok következő halmazait:

$$\tilde{\mathbb{S}} := I_2(e \overset{\bullet}{+} e_1), \quad \mathbb{S}^\natural := I_3(e) = e \overset{\bullet}{+} \mathbb{I}_3, \quad \mathbb{S}^\dagger := I_6(e \overset{\bullet}{+} e_3 \overset{\bullet}{+} e_5).$$

Tétel 13 *[I. Simon[43]] a) A* cos *függvény* $\mathbb{S}$*-ről* $\mathbb{S}^\dagger$*-ra képez. Továbbá,* cos : $\tilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \to \mathbb{S}^\dagger$ *egy bijekció.*
b) A cos *függvény* $\mathbb{I}$*-t* $\mathbb{S}^\natural$*-re képezi.*

Jelöljük a cos : $\tilde{\mathbb{S}} \to \mathbb{S}^\dagger$ inverzét arccos-al, melynek értelmezési tartománya $\mathbb{S}^\dagger$.

Lemma 9 *[I. Simon[43]]* $f(t) := \cos(e_{-4} \bullet t)$ *egy DMSP-függvény* $\tilde{\mathbb{S}_4} = I_6(e_4 \overset{\bullet}{+} e_5)$*-on és* $\mathbb{S}_4 \setminus \tilde{\mathbb{S}_4} = I_6(e_4)$*-on is.*

Hasonlóan, sin : $\mathbb{S} \to I_3(e + e_2)$ bijekció, és $x \mapsto \sin(x) \bullet e_{-2}$ egy DMSP-függvény $\mathbb{S}$-en.

Tétel 14 *[I. Simon[43]] A* $(\sqrt{2}COS_n, n \in \mathbb{N})$, $(\sqrt{2}SIN_n, n \in \mathbb{N})$ *rendszerek ortogonálisak és* $n \in \mathbb{N}^*$ *esetén ortonormált is.*

16.3 A 2-adikus Chebyshev polinomok

Első ránézésre túlzásnak tűnhet az alábbi definícióban kétszer szerepeltetni k-t, de az első azt biztosítja, hogy UDMD szorzat-rendszert kapjunk, míg a második a Chebyshev polinomok természetéhez tartozik.

Definíció 16 *A* **2-adikus elsőfajú Chebyshev polinom***okat értelmezzük a* $t_k(x) := v_{2^{k+6}}\left(\cos[(2k+1)\arccos(x)]\right)$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger, k \in \mathbb{N})$ *szorzat-rendszereként:*

$$T_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[v_{2^{k+6}}\left(\cos[(2k+1)\arccos(x)]\right)\right]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{S}^\dagger, n \in \mathbb{N}). \tag{16.1}$$

Definíció 17 *A 2-adikus másodfajú Chebyshev polinomokat értelmezzük az* $u_k(x) := v_{2^{k+3}}\left(\sin[(2k+1)\arccos(x)]\right)$ $(x \in \mathbb{S}^\dagger, k \in \mathbb{N})$ *szorzat-rendszereként:*

$$U_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[v_{2^{k+3}}\left(\sin[(2k+1)\arccos(x)]\right)\right]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{S}^\dagger, n \in \mathbb{N}). \tag{16.2}$$

Lemma 10 *[I. Simon[43]] Az* $x \mapsto \cos((2n+1)\arccos x)$ *és* $x \mapsto e_3 \bullet \sin((2n+1)\arccos x)$ *függvények DMSP-függvények az* $\mathbb{S}^\dagger$*-on minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén.*

Tétel 15 *[I. Simon[43]] A* $(T_n, n \in \mathbb{N})$ *és* $(U_n, n \in \mathbb{N})$ *2-adikus Chebyshev polinomok rendre teljes ortonormált rendszert alkotnak.*

Tekintsük az alábbi eltolás-operátorokat:

$$S : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^\dagger,\ S(x) := x \bullet e_6 \overset{\bullet}{+} e \overset{\bullet}{+} e_3 \overset{\bullet}{+} e_5,$$
$$S' : \tilde{\mathbb{S}} \to \mathbb{I},\ S'(x) := [x \overset{\bullet}{-} e \overset{\bullet}{-} e_1] \bullet e_{-2}.$$

Megjegyzés: 1) Mint minden UDMD szorzat-rendszer esetén, egy $f \in L^p(\mathbb{I})$ $(p > 1)$ függvény $(T_n, n \in \mathbb{N})$ illetve $(U_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer szerinti Fourier sora m.m. konvergál f-hez, ami a Schipp [37], 4. Tétel következménye. Továbbá egy $f \in L^1(\mathbb{I})$ függvény ezen rendszer szerinti Fourier soraira (C,1)-összegezhetőség is teljesül, ami a Gát[9] Vilenkin-szerű rendszerekre kimondott 15. Tételének következménye.

2) A 2-adikus első- és másodfajú Chebyshev polinomok $\mathbb{I}$-n is értelmezhetőek a fent említett eltolásoperátorok használatával:

$$\widetilde{T_n}(x) := \prod_{k=0}^{\infty} [v_{2^{k+6}}(\cos[(2k+1)\arccos(S(x))])]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}),$$
$$\widetilde{U_n}(x) := \prod_{k=0}^{\infty} [v_{2^{k+3}}(\sin[(2k+1)\arccos(S(x))])]^{n_k} \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}).$$

Definíció 18 *A 2-adikus harmad- és negyedfajú Chebyshev polinomokat a következőképpen értelmezzük:*

$$\begin{aligned} \overline{T_n}(x) &:= COS_n[S'(\arccos(S(x))] \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}),\\ \overline{U_n}(x) &:= SIN_n[S'(\arccos(S(x))] \qquad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Tétel 16 *[I. Simon[43]] A* $(\overline{T_n}, n \in \mathbb{N}), (\overline{U_n}, n \in \mathbb{N})$ *2-adikus harmad- és negyedfajú Chebyshev polinomok ortonormált rendszert alkotnak* $L^2(\mathbb{I})$*-ben.*

Tétel 17 *[I. Simon[43]] A* $(\overline{T_{2^n}}, n \in \mathbb{N}), (\overline{U_{2^n}}, n \in \mathbb{N})$ *részrendszerek UDMD rendszerek* $\mathbb{I}$*-n.*

Bibliography

[1] Agajev, G.N., Vilenkin, N.Ja., Dzafarli, G.M. and Rubinstein, A.I., *Multiplicative systems and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku, ELM, (1981), pp. 180-198.

[2] Alexits, G., *Convergence problems of orthogonal series*, Budapest, (1961).

[3] Bokor, J. and Schipp, F., *Approximate linear H^∞ identification in Laguerre and Kautz basis* Automatica J. IFAC, 34(1998), pp. 463-468.

[4] Chui,C. K., Chen, G., *Signal Processing and Systems Theory* 26, New York, Springer-Verlag, (1992).

[5] Duren, P., *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, (1970).

[6] Duren, P., Schuster, A., *Bergman Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. Vol. 100., (2003).

[7] Gát, G., *On the almost everywhere convergence of Fejér means of functions on the group of 2-adic integers*, Journal of Approx. Theory, 90(1)(1997), pp. 88-96.

[8] Gát, G., *Almost everywhere convergence of Cesàro means of Fourier series on the group of* 2*-adic integers*, Acta Math. Hungar., 116(3) (2007), pp. 209-221.

[9] Gát, G., *On* $(C, 1)$ *summability of integrable functions on compact totally disconnected spaces*, Studia Math., 144(2) (2001), pp. 101-120.

[10] Gát, G., *Orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Math. Hungar. 58(1-2)(1991), pp. 193-198.

[11] Gát, G., *Convergence and Summation With Respect to Vilenkin-like Systems* Recent Developments in Abstract Harmonic Analysis with Applications in Signal Processing, Nauka, Belgrade and Elektronski fakultet, Nis, (1996), pp. 137-146.

[12] Hewitt, E., Ross, K., *Abstract Harmonic Analysis, volume 1, 2*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1963).

[13] Indlekofer, K.-H., *Bemerkungen über äquivalante Potenzreihen von Funktionen mit gewissem Stetigkeitsmodul*, Monatsh. Math. 76(1972), pp. 124-129.

[14] Sahoo, P., Kannappan, P., *Introduction to functional equaions*, Boca Raton, London, New York: CRC Press, (2011), pp. 131-160.

[15] Schipp, F. *Über gewissen Maximaloperatoren*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math., 18(1975), pp. 189-195.

[16] Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Pál, J., *Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Ltd., Bristol and New York, (1990).

[17] Schipp, F., Wade, W.R., *Transforms on normed fields*, Leaflets in Mathematics, Janus Pannonius University Pécs, (1995).
available also at $http://numanal.inf.elte.hu/\tilde{}schipp/TrNFields.pdf$.

[18] Schipp, F., *On adapted orthonormed systems*, East J. on Approximation, 6(2)(2000), pp. 157-188.

[19] Schipp, F., Bokor, J., Gianone, L., *Approximate H^∞ identification using partial sum operators in the disc algebra basis*, Proc. Amer. Control Conf., Seatle, WA (1995), pp. 1981-1985.

[20] Schipp, F., Bokor, J., Keviczky, L., *Approximation by discrete Laguerre functions in H^∞ norm* Research report of the US Army aand Automation Research Institute for Hungarian Academy of Sciences, DAAH 04-9601-0068, (1996).

[21] Schipp, F., Bokor, J., Gianone, L. and Szabó, Z., *Identification in generalized orhogonal basis - a frequency domain approach*, 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, I, (1996), pp. 387-392.

[22] Schipp, F., Szili, L., *Approximation in H-norm*, AFS' 95, Bolyai Soc. Math. Studies, Budapest, 5(1996), pp. 307-320.

[23] Schipp, F., Bokor, J., *Rational bases generated by Blaschke product system*, 13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam, SYSID-2003, pp. 1351-1356. (CD)

[24] Schipp, F., Bokor, J., Soumelidis, A., *Detection of changes on signals and systems based upon representations in orthogonal rational bases* Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes 2003 (SAFEPROCESS 2003): A Proceedings Volume from the 5th IFAC Symposium, Washington, DC, USA, 9-11 June 2003. Elsevier, (2003), pp. 327-332.

[25] Schipp, F., Bokor, J., Soumelidis, A., *Applying orthogonal rational signal representations in system change detection*, Mediterrean Control Conference. MED-2003. (CD)(2003).

[26] Schipp, F., *Rational Haar systems and fractals on the hyperbolic plane*, Sacks Memorial Conference, Szentgotthárd, Oskar Kiadó, (2003).

[27] Schipp, F., *Fast Fourier transform for rational systems*, Mathematica Pannonica, 13(2002), pp. 265-275.

[28] Schipp, F., Pap, M., *The Voice Transform on the Blaschke Group I.*, Pure Math. and Appl., 17 (3-4) (2006), pp. 287-395.

[29] Schipp, F., Pap, M., *The Voice Transform on the Blaschke Group II.*, Pannales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., 29 (2008), pp. 157-173.

[30] Schipp, F., *Wavelet like transform on the Blaschke group*, Walsh and Dyadic Analysis. Proc. of the Workshop, Nis, Elektronski fakultet, (2008), pp. 85-93.

[31] Schipp, F., Pap, M., *The Voice Transform on the Blaschke Group III.*, Publ. Math. Debrecen, 75(1-2)(2009), pp. 263-268.

[32] Schipp, F., Bokor, J., Soumelidis, A., *Applying hyperbolic wavelet constructions in the identification of signals and systems*, System Identification, 15(1)(2009), pp.1334-1339.

[33] Schipp, F., Bokor, J., Soumelidis, A., *Signal and system representations on hyperbolic groups: beyond rational orthogonal bases*, Computational Cybernetics, 2009. ICCC 2009. IEEE International Conference on. IEEE, (2009), pp. 11-24.

[34] Schipp, F., *On a generalization of the concept of orthogonality*, Acta Sci. Math., 37 (1975), pp. 279-285.

[35] Schipp, F., *On Lp-norm convergence of series with respect to product systems*, Analysis Math., 2 (1976), pp. 49-64.

[36] Schipp, F., *Pointwise convergence of expansions with respect to certain product systems*, Analysis Math., 2 (1976), pp. 65-76.

[37] Schipp, F., *Universal contractive projections and a.e. convergence*, Probability Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1992), pp. 47-75.

[38] Schipp, F., *On orthonormal product systems*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 20(2004)

[39] Simon, I., *Discrete Laguerre functions on the dyadic fields*, Pure Math. Appl., 17(3-4)(2006), pp. 459-468.

[40] Simon, I., *The characters of the Blaschke-group*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 54(3)(2009), pp. 149-160.

[41] Simon, I., *Malmquist-Takenaka functions on local fields*, Acta Univ. Sapientiae Math., 3(2)(2011), pp. 135-143.

[42] Simon, I., *On transformations by dyadic martingale structure preserving functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 39 (2013), pp. 381-390.

[43] Simon, I., *Construction of 2-adic Chebyshev polynomials*, submitted.

[44] de Place Frijs, P., Stetkaer, H., *On the cosine-sine functional equation on groups* Aequationes Mathematicae, 64(1-2) (2002), pp. 145-164.

[45] Taibleson, M. H., *Fourier analysis on local fields*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1975).

[46] Turán, P., *A remark concerning the behavior of power series on the periphery of its convergence circle*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 12 (1958), pp. 19-26.

[47] Vladimirov, V.S., Volovich, I.V. and Zelnov, E.I., *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, Series in Soviet and East European Mathematics, Vol. 10, World Scientific Publishers, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, (1994).

[48] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Vol. I, II, Cambridge University Press, New York, (1959).

List of papers of the author

1. Simon, I.: *Discrete Laguerre functions on the dyadic fields* , Pure Math. Appl., 17(2006)(3-4), p. 459-468.

2. Simon, I.: *The characters of the Blaschke-group*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 54(3)(2009), pp. 149-160.

3. Simon, I.: *Malmquist-Takenaka functions on local fields*, Acta Univ. Sapientiae Math., 3(2)(2011), pp. 135-143.

4. Simon, I.: *On transformations by dyadic martingale structure preserving functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 39 (2013), pp. 381-390.

5. Simon, I.: *Construction of 2-adic Chebyshev polynomials*, submitted.

List of talks of the author

I participated and gave a talk in the following international conferences with the following titles:

1. Discrete Laguerre Functions on Local Fields, *6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science,* Pécs, Hungary, July 2006.
2. Characters of the Blaschke-group on the arithmetic field, *7th Joint Conference on Mathematics and Computer Science,* Cluj, Romania, July 2008.
3. Orthogonal series on the arithmetic field, *Workshop on Dyadic Analysis and Related Areas with Applications*, Dobogókő, Hungary, June, 2009.
4. Malmquist-Takenaka functions on local fields, *8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science,* Komarno, Slovakia, July, 2010.
5. Transformation with a Blaschke Function, *9th Joint Conference on Mathematics and Computer Science,* Siófok, Hungary, February 2012.
6. Some orthogonal systems on the dyadic and 2-adic field, Workshop titled "Walsh-Fourier sorok approximációs kérdései", Nyíregyháza, Hungary, 27 November 2012.

Lectures were given by the author at workshops of the following universities:

1. Universität Paderborn (Germany), January 2010.
2. University of Camerino (Italy), May 2011.
3. HTW- Hochhscule für Technik und Wirtshaft, Dresden (Germany), May 2012.
4. Dumlupinar University, Kutahya (Turkey), May 2013.