Diadikus ortonormált rendszerek Fourier-sorainak vizsgálata

Blahota István

Habilitációs értekezés tézisei

Debreceni Egyetem
2012

Tartalomjegyzék

Az értekezésben tárgyalt cikkek adatai **2**

1. Bevezetés **3**
1.1. A habilitációs cikkgyűjteményről . . . 3
1.2. Történeti áttekintés . . . 3
1.3. Néhány gondolat a jelölésekről, fogalmakról . . . 5

2. Fourier-közepek majdnem mindenütti konvergenciája 2-adikus egészek csoportján **6**
2.1. 2-adikus egészek csoportja . . . 6
2.2. Nörlund logaritmikus közepek majdnem mindenütti konvergenciája . . . 7
2.3. Marcinkiewicz-közepek majdnem mindenütti konvergenciája . . . 10

3. Fourier-közepek maximál operátorai **13**
3.1. d-dimenziós Walsh–Fourier-sorok . . . 13
3.2. (C, α)-közepek maximál operátorai . . . 17
3.3. Egy- és kétdimenziós Vilenkin-rendszerek . . . 18
3.4. Fejér-közepek maximál operátorai . . . 23
3.5. Marcinkiewicz-közepek maximál operátorai . . . 24

4. Nörlund logaritmikus közepek normakonvergenciája nemkorlátos Vilenkin-rendszereken **26**
4.1. Nemkorlátos Vilenkin-rendszerek . . . 26
4.2. Nörlund logaritmikus közepek normakonvergenciája . . . 26

5. Magfüggvények vizsgálata általánosított Vilenkin-rendszereken **29**
5.1. Reprezentatív szorzatrendszerek . . . 29
5.2. Vilenkin-szerű rendszerek . . . 31
5.3. Súlyozott magfüggvények . . . 33
5.4. Magfüggvények maximál értéke . . . 35

Blahota István publikációs jegyzéke **38**

További irodalom **40**

Az értekezésben tárgyalt cikkek adatai

[13] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of Vilenkin–Fourier series*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7/4, 2006, 149.

[14] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin–Fourier series*, Colloquium Mathematicum, 107/2, 2007, 287-296.

[15] Blahota, I., Goginava, U., *The maximal operator of the Marcinkiewicz–Fejér means of the 2-dimensional Vilenkin–Fourier series*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 45/3, 2008, 321-331.

[16] Blahota, I., Gát, G., *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Analysis in Theory and Applications, 24/1, 2008, 1-17.

[17] Blahota, I., Gát, G., *Almost everywhere convergence of Marcinkiewicz means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Studia Mathematica, 191, 2009, 215-222.

[18] Blahota, I., Goginava, U., *The martingale Hardy type inequality for the maximal operator of the (C, α) means of cubic partial sums of the d-dimensional conjugate Walsh–Fourier series*, Mathematica Pannonica, 21/1, 2010, 65-76.

[19] Blahota, I., *On the L^1 norm of the weighted maximal function of kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Mathematica Pannonica, 23/1, 2012, 1-9.

[20] Blahota, I., *On the maximal value of Dirichlet and Fejér kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80/3-4, 2012, 503-513.

[21] Blahota, I., *Almost everywhere convergence of subsequence of logarithmic means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Georgian Mathematical Journal, 19/3, 2012, 417-425.

1. Bevezetés

1.1. A habilitációs cikkgyűjteményről

A habilitációs cikkgyűjteményben kilenc publikáció szerepel, melyek mindegyike Blahota István PhD disszertációjának megvédése után születtek. Ezen cikkek paraméterei a 2. oldalra lettek kigyűjtve, a teljes publikációs lista a 38. oldalon kezdődik. Az eredmények tartalmuk szerint négy fejezetben kerülnek bemutatásra.

1.2. Történeti áttekintés

Amikor Walsh 1923-ban [65] bevezette a később róla elnevezett rendszert, egy olyan teljes ortonormált rendszer előállítása motiválta, amelynek n-edik tagja a trigonometrikus rendszer n-edik tagjához hasonlóan éppen n-szer vált előjelet. A Walsh-rendszer más rendszerekhez is részleges hasonlóságot mutat. Például függvényei – akárcsak a Haar-rendszeréi – konstans szakaszokból állnak, viszont mivel csak -1 és $+1$ értékeket vesznek fel, így a Walsh-rendszer a Haar-rendszerrel ellentétben egyenletesen korlátos. Egyébként a Walsh- és Haar-rendszerek egymás Hadamard-transzformáltjai [60].

1932-ben Paley [51] egy másik, könnyebben kezelhető előállítását adta meg a Walsh-függvényeknek, mely a Rademacher-rendszer [54] függvényein alapult. A Rademacher-rendszer egy nem teljes ortonormált rendszer, melynek függvényei rendre a Walsh-rendszer 2^n-edik elemei. Paley definíciója (amely Walsh definíciójával ellentétben nem rekurzív) a Walsh-rendszer egy blokkonkénti átrendezését eredményezi. Bár más, szintén 2^n hosszúságú blokkonkénti átrendezéssel keletkezett rendszer is elterjedt (a Šneider [61] által 1948-ban bevezetett Walsh–Kaczmarz-rendszer), a legtöbb és legkevésbé problematikusan bizonyítható állítás Walsh–Paley-rendszerre vált ismertté. Amikor ma Walsh-rendszerről beszélünk, általában a Walsh–Paley-rendszerre gondolunk az eredeti Walsh-rendszer helyett.

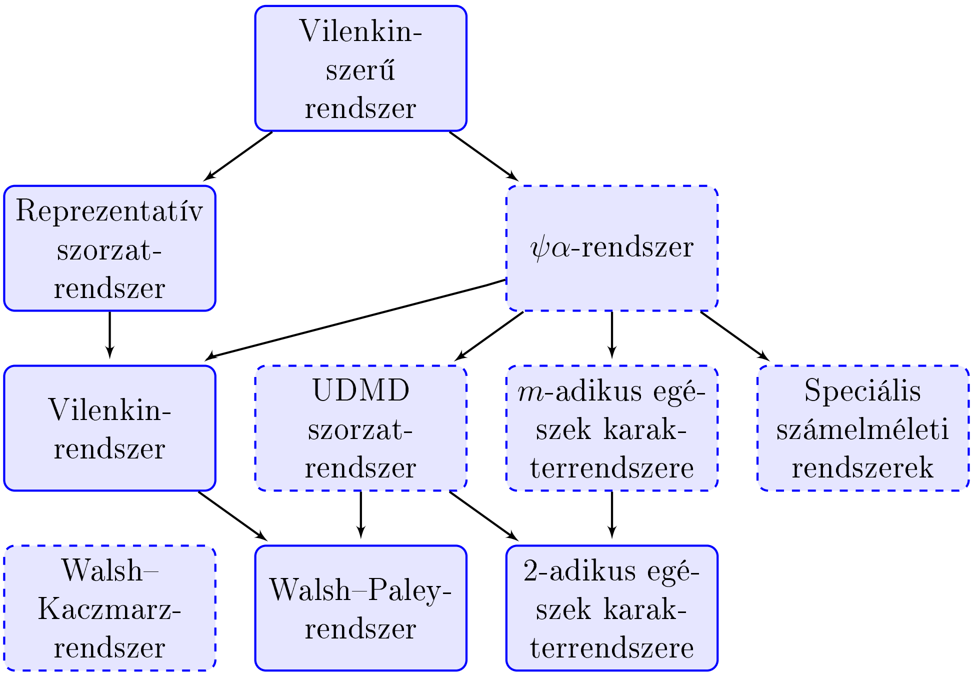
Kezdetben a Walsh-rendszer bevezetésének nem volt túl nagy visszhangja, mivel azonban a rendszer függvényei csak kétféle értéket vesznek fel, a digitális technológia elterjedésével a Walsh-analízis az informatikai Fourier-alkalmazások meghatározó tényezőjévé vált.

A 2-adikus egészek karakterrendszere [63] a Walsh–Paley-hez hasonló – Walsh-szerűként emlegetett – rendszer, ahol a művelet Walsh–Paley-esettől eltérően nem a diadikus, hanem a szokásos, algebrai összeadás. Maga a 2-adikus egészek csoportja, illetve annak általánosításai Hensel jóvoltából [42]

A kutatás a TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0051 projekt keretében történt.

1913 óta már biztosan ismertek, de a Fourier analízis céljaira történő felhasználásuk későbbre datálható. Olyan alapvető eredmény is, mint például az integrálható függvények Fejér-közepeinek majdnem mindenütti konvergenciája (mely Taibleson sejtése [63] volt) csak 1997-ben került bizonyításra (lásd Gát [30] cikkét).

1947-ben Vilenkin [64] általánosította a Walsh–Paley-rendszert (ez lett a Vilenkin-rendszer), egyúttal csoportelméleti alapokra helyezte át a további vizsgálatokat. Fine [23] tőle függetlenül 1949-ben szintén a diadikus csoportok karaktereiként vezette be a Walsh–Paley-rendszert. A Vilenkin-rendszereket teljesen széteső, végtelen, a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, kompakt topologikus csoportok karakterei alkotják. Minden ilyen csoportot egy 1-nél nagyobb természetes számokból álló sorozat generál. Amenynyiben ez az azonosan 2 sorozat, a karakterek a Walsh–Paley-rendszert adják. Ha a generáló sorozat korlátos, a Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos állítások gyakran analógak a Walsh–Paley-esetekkel, míg nemkorlátos esetben komoly eltérések mutatkoznak mind az állítások tartalmában, mind a bizonyítási technológiák mélységében.



1. ábra. Rendszerek és egymáshoz való viszonyuk

Az 1990-es években Gát (a második esetben Toledoval közösen) a Vilenkin-rendszer háromféle általánosítását is bevezette. A $\psi\alpha$-rendszer esetén a Vilenkin-csoporton értelmezett rendszerfüggvényeket általánosította [26], a reprezentatív szorzatrendszerek esetén már a kommutatív Vilenkin-csoport helyett is általános, nem feltétlenül kommutatív (de véges) csoportok [34], míg a Vilenkin-szerű rendszer esetén művelet nélküli véges halmazok direkt szorzatát [29] vette alapul.

A dolgozatban tárgyalt ortonormált rendszerek közötti viszonyrendszert mutatja az 1. ábra. A nyilak az általánosabbtól a speciálisabbig mutatnak (a Walsh–Kaczmarz-rendszer nem áll ilyen jellegű relációban egyetlen ismert rendszerrel sem). Szaggatott vonalakkal határoltuk azon rendszerek nevét, melyek megemlítésre kerülnek, de a szerző jelen munkában tárgyalt eredményei között nem szerepel (konkrétan) rájuk vonatkozó tétel, ellentétben az ábrán szereplő többi rendszerrel.

1.3. Néhány gondolat a jelölésekről, fogalmakról

Ahogy az a fenti bevezetőből, valamint az 1. ábra alapján kiderül, ez a habilitációs munka számos rendszert és azokkal kapcsolatos fogamat, állítást tárgyal. Mivel ezek a rendszerek és fogalmaik több tekintetben hasonlóak, a bevezetett tradicionális jelölések globálisan tekintve félrevezetőek lehetnek. Ennek az az oka, hogy formailag teljesen megegyező jelölések más-más rendszer esetén nem pontosan ugyanazt jelentik. Például nyilvánvaló, hogy $S_n f(x)$ (egy függvény Fourier-sorának n-edik részletösszege) különböző ortonormált rendszer esetén mást és mást jelent.

Így a szokásoktól eltérően a fogalmak és jelölések bevezetésére nem a munka elején, egyszerre kerül sor, hanem az aktuális fejezetek első alfejezeteiben, lokálisan.

2. Fourier-közepek majdnem mindenütti konvergenciája 2-adikus egészek csoportján

2.1. 2-adikus egészek csoportja

Legyen $I := [0, 1)$ egységnyi hosszúságú intervallum, valamint legyen

$$\mathcal{I} := \left\{ \left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right) : p, n \in \mathbb{N} \right\}$$

a diadikus intervallumok halmaza, ahol $p \leq 2^n - 1$ és $\mathbb{N}$ jelöli a nemnegatív egészeket. Adott $x \in I$ esetén $I_n(x)$ jelölje az x-et tartalmazó 2^{-n} hosszúságú diadikus intervallumot, ahol $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $I_n := I_n(0)\,(n \in \mathbb{N})$. Tekintsük az $x \in I$ elem

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-(n+1)}$$

diadikus felbontását, ahol $x_n = 0$ vagy 1, és ha x diadikus racionális szám (vagyis $x \in \{\frac{p}{2^n} : p, n \in \mathbb{N}\}$), válasszuk a nullákra végződő felbontását.

A 2-adikus (más néven aritmetikai) összeadás $a, b \in I$ esetén legyen a következő: $a + b := \sum_{n=0}^{\infty} r_n 2^{-(n+1)}$, ahol $q_n, r_n \in \{0, 1\}$ rekurzív módon vannak definiálva úgy, hogy $q_{-1} := 0$ és $a_n + b_n + q_{n-1} := 2q_n + r_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. (Mivel q_n, r_n csak a $0, 1$ értékek valamelyikét vehetik fel, ezek az egyenlőségek egyértelműen meghatározzák a q_n és r_n együtthatókat.) Az $(I, +)$ csoportot 2-adikus egészek csoportjának nevezzük.

Legyen

$$\epsilon(t) := \exp(2\pi\imath t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\imath$ pedig a képzetes egységet jelöli. Legyen

$$v_{2^n}(x) := \epsilon\left(\frac{x_n}{2} + \cdots + \frac{x_0}{2^{n+1}} \right) \quad (x \in I, n \in \mathbb{N})$$

és

$$v_n(x) := \prod_{n=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}(x),$$

ahol $\mathbb{N} \ni n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i \,(n_i \in \{0, 1\}\,(i \in \mathbb{N}))$. Ismert (lásd például Hewitt és Ross [44] könyvét), hogy a $(v_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer $(I, +)$ karakterrendszere.

Jelölje

$$\hat{f}(n) := \int_I f(x)\bar{v}_n(x)dx\,,\; D_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x)\,,\; K_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

rendre a Fourier-együtthatókat, a Dirichlet- és a Fejér-féle magfüggvényeket. A felülvonás a komplex konjugáltat jelzi.

2.2. Nörlund logaritmikus közepek majdnem mindenütti konvergenciája

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[21] Blahota, I., *Almost everywhere convergence of subsequence of logarithmic means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Georgian Mathematical Journal, 19/3, 2012, 417-425.

Először általánosan definiáljuk a Nörlund-közepeket. Ha $q_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{P})$, akkor az általa generált közép legyen

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} S_k f(x), \text{ ahol } Q_n := \sum_{k=1}^{n-1} q_k.$$

$\mathbb{P}$-vel a pozitív egészeket jelöltük.

Móricz [49] Walsh–Paley-rendszeren tárgyalja bizonyos q sorozatok által generált Nörlund-közepek normakonvergenciáját. (Cikkében egyébként nem foglalkozik az alábbiakban vizsgált $q_k = \frac{1}{k}$ esettel, pontosabban az általa használt eljárás erre az esetre nem működik.)

Speciálisan, amennyiben $q_k = \frac{1}{k}$, Nörlund logaritmikus közepekről beszélünk, melyek definíciója tehát a következő:

$$t_n f(x) := \frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k f(x)}{n-k}, \text{ ahol } l_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Néha a „Nörlund logaritmikus közép" helyett egyszerűen csak a „logaritmikus közép" kifejezést használják, bár az valójában (a fenti jelölésekkel) a $q_k = \frac{1}{n-k}$ esetet jelenti.

Világos, hogy

$$t_n f(x) = (f * F_n)(x) := \int_I f(s) F_n(x-s)\, ds,$$

ahol

$$F_n(x) := \frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_k(x)}{n-k}.$$

A Walsh–Paley-rendszeren értelmezett Nörlund logaritmikus közepekkel kapcsolatban további információk olvashatóak például Goginava és Tkebuchava [40] cikkében, míg nemkorlátos Vilenkin-rendszeren bizonyított ide vonatkozó eredményeket a 4.2. alfejezetben találunk.

Az f függvény weak-L (gyenge-L) normáját az alábbi módon definiáljuk:

$$\|f\|_{\text{weak-}L} := \sup_{\lambda} \lambda \cdot \mu(\{x : f(x) > \lambda\}),$$

ahol μ-vel a Lebesgue-mértéket jelöltük. Legyen továbbá $L^p(I)$ a szokásos Lebesgue-tér, valamint legyen $\|\cdot\|_p$ a megfelelő norma $(1 \le p \le \infty)$.

Az alfejezet fő eredménye a következő:

2.2.1. Tétel (Blahota [21]). *Ha $\{m_n : n \in \mathbb{P}\}$ pozitív egészek olyan sorozata, melyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(m_n - 2^{[\log m_n]} + 1)}{\log m_n} < \infty$$

fennáll, akkor a $t^*f(x) := \sup_{n\in\mathbb{P}} |t_{m_n} f(x)|$ operátor gyengén $(1,1)$ típusú, vagyis $\|t^* f\|_{weak\text{-}L} \le c\|f\|_1$.

(A szögletes zárójel az egészrész függvényt jelenti.) A Walsh–Paley-rendszerre vonatkozó analóg állítást Goginava [35], korlátos Vilenkin-rendszerekre Gát és Nagy [33] bizonyította.

Marcinkiewicz és Zygmund sűrűségi argumentumos módszerét [46] használva a 2.2.1. Tételből a következő két állítást kapjuk.

2.2.1. Következmény (Blahota [21]). *Legyen $\{m_n : n \in \mathbb{P}\}$ pozitív egészek olyan sorozata, mely kielégíti a 2.2.1 Tétel feltételeit, valamint $f \in L^1(I)$. Ekkor*

$$t_{m_n} f(x) \to f(x)$$

majdnem mindenütt, amint $n \to \infty$.

2.2.2. Következmény (Blahota [21]). *Legyen $f \in L^1(I)$, ekkor*

$$t_{2^n} f(x) \to f(x)$$

majdnem mindenütt, amint $n \to \infty$.

A 2.2.1. Tétel bizonyításánál az alábbi segédtételeket használtuk fel. Az első az úgynevezett Paley-lemma, jelen esetben 2-adikus egészek csoportjának karakterrendszerén.

2.2.1. Lemma (Schipp, Wade [58]). *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } x \in I_n, \\ 0, & \text{ha } x \notin I_n. \end{cases}$$

2.2.2. Lemma (Gát [27]). *Legyen* $1 \leq j < 2^n$*, ekkor*

$$D_{2^n-j}(x) = D_{2^n}(x) - v_{2^n-1}(x)\bar{D}_j(x).$$

2.2.3. Lemma (Blahota [21]). *Legyen* $1 \leq j < 2^n$*, ekkor*

$$D_{2^n+j}(x) = D_{2^n}(x) + v_{2^{n+1}-1}(x)\bar{v}_{2^n-1}(x)D_j(x).$$

Mostantól (végig az egész dolgozatban) c jelöljön pozitív abszolút konstanst, különböző előfordulásaiban nem mindig ugyanazt.

2.2.4. Lemma (Gát [27]). *Legyen* $A > \tau$ *rögzített pozitív egész. Ekkor*

$$\int\limits_{I_\tau \backslash I_{\tau+1}} \sup_{n \geq 2^A} |K_n(x)| dx \leq c(2^{\tau-A})^{\frac{1}{2}}.$$

A továbbiakban használni fogjuk a $\bar{I}_k := I \backslash I_k$ jelölést (vagyis halmaz esetén a felülvonás komplementerre utal).

2.2.3. Következmény (Blahota [21]). *Fennáll*

$$\int\limits_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^k} |K_n(x)| dx \leq c.$$

2.2.5. Lemma (Schipp, Wade [58]). *A Fejér-féle magfüggvények normái egyenletesen korlátosak, vagyis*

$$\|K_n\|_1 \leq c.$$

A következő segédtétel egy általánosabb rendszerre lett bizonyítva.

2.2.6. Lemma (Gát [25]). *A*

$$\|D_n\|_1 \leq \ln(n+1)$$

egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén fennáll.*

2.2.7. Lemma (Blahota [21]). *Legyen* $2^n \leq m < 2^{n+1}$*, ekkor*

$$\begin{aligned} l_m F_m(x) &= l_m D_{2^n}(x) \\ &- v_{2^n-1}(x) \sum_{j=1}^{2^n-2} \left(\frac{1}{m-2^n+j} - \frac{1}{m-2^n+j+1} \right) j\bar{K}_j(x) \\ &- v_{2^n-1}(x) \frac{2^n-1}{m-1} \bar{K}_{2^n-1}(x) + v_{2^n}(x)\bar{v}_{2^n-1}(x) l_{m-2^n} F_{m-2^n}(x). \end{aligned}$$

2.2.8. Lemma (Blahota [21]). *Ha* $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log^2(m_n - 2^{[\log m_n]}+1)}{\log m_n} < \infty$, *akkor*

$$\|F_{m_n}\|_1 \le c, \quad \forall n \in \mathbb{P}.$$

2.2.9. Lemma (Blahota [21]). *Ha* $\{m_n : n \in \mathbb{P}\}$ *pozitív egészek olyan sorozata, mely kielégíti a 2.2.1 Tétel feltételeit, akkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \ge n(k)} |F_{m_n}(x)| dx \le c,$$

ahol $n(k) := \min\{n : [\log m_n] \ge k\}$.

2.2.10. Lemma (Blahota [21]). *Legyen* $f \in L^1(I)$. *Amennyiben* $\operatorname{supp} f \subset I_k(u)$ *és* $\int_{I_k(u)} f(x)dx = 0$ *teljesül valamely* $u \in I$ *esetén, akkor*

$$\int_{\bar{I}_k} t^* f(x) dx \le c\|f\|_1.$$

(Ez azt jelenti, hogy t^*f *kvázi-lokális.)*

Ebből következik az alábbi állítás.

2.2.4. Következmény (Blahota [21]). *A* t^*f *maximál operátor* (∞, ∞) *típusú.*

2.3. Marcinkiewicz-közepek majdnem mindenütti konvergenciája

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[17] Blahota, I., Gát, G., *Almost everywhere convergence of Marcinkiewicz means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Studia Mathematica, 191, 2009, 215-222.

Bevezetünk néhány, a 2-adikus egészek csoportján értelmezett kétdimenziós Fourier-sorok elméletéhez kapcsolódó jelölést. A normalizált Haar-mértéket az egydimenziós eset analógiájaként értelmezzük. A kétdimenziós Fourier-együtthatókat és a Fourier-sorok tégläny részletösszegét az alábbi módokon definiáljuk:

$$\hat{f}(n^1, n^2) := \int_{I^2} f\left(x^1, x^2\right) \bar{v}_{n^1}\left(x^1\right) \bar{v}_{n^2}\left(x^2\right) dx^1 dx^2,$$

$$S_{n^1,n^2}f\left(x^1,x^2\right) := \sum_{k^1=0}^{n^1-1}\sum_{k^2=0}^{n^2-1}\hat{f}(k^1,k^2)v_{k^1}\left(x^1\right)v_{k^2}\left(x^2\right),$$

Definiáljuk a Marcinkiewicz- (más néven Marcinkiewicz–Fejér-) közepeket és a Marcinkiewicz-féle magfüggvényeket a következőképpen:

$$\sigma_n f\left(x^1,x^2\right) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}S_{j,j}f\left(x^1,x^2\right), \quad K_n\left(x^1,x^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}D_j\left(x^1\right)D_j\left(x^2\right).$$

Használni fogjuk még az alábbi jelölést:

$$K_{a,b}\left(x^1,x^2\right) := \sum_{k=a}^{a+b-1}D_k\left(x^1\right)D_k\left(x^2\right).$$

Az alfejezet fő eredménye a következő:

2.3.1. Tétel (Blahota, Gát [17]). *Minden $f \in L^1(I^2)$ esetén $\sigma_n f\left(x^1,x^2\right) \to f\left(x^1,x^2\right)$ majdnem mindenütt, amennyiben $n \to \infty$.*

Vagyis minden $f \in L^1(I^2)$ függvény 2-adikus egészek csoportjának karakterrendszeréből származó Marcinkiewicz-közepei majdnem mindenütt konvergálnak f-hez.

Ezt az eredményt trigonometrikus rendszerre Grünwald [41], szintén trigonometrikus rendszer esetén néhány Nörlund típusú középre Herriot [43] bizonyította. Lásd még Zhizhiasvili tárgykörre vonatkozó eredményeit [74].

A tétel bizonyításához felhasznált segédtételek ismertetéséhez vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $n^{(j)} := \sum_{i=j}^{\infty} n_i 2^i$ $(n, j \in \mathbb{N})$. Ha $2^B \leq n < 2^{B+1}$, akkor legyen $|n| := B$, valamint legyen $J_\tau := I_\tau \backslash I_{\tau+1}$.

2.3.1. Lemma (Blahota, Gát [17]). *Legyen $t^1 \leq t^2$, ekkor*

$$\sum_{t^1=0}^{m-1}\sum_{t^2=t^1}^{\infty}\int_{J_{t^1}\times J_{t^2}}\sup_{A\geq m}\sup_{|n|=A}\frac{1}{2^A}\sum_{s=t^1+1}^{A}\left|K_{n^{(s)},2^s}\left(x^1,x^2\right)\right|dx^1dx^2 < c.$$

Jelölje $\overline{I_m^2}$ az I_m^2 halmaz komplementerét.

2.3.2. Lemma (Blahota, Gát [17]).

$$\int_{\overline{I_m^2}}\sup_{|n|\geq m}\left|K_n\left(x^1,x^2\right)\right|dx^1dx^2 \leq c$$

2.3.1. Következmény (Blahota, Gát [17]). *A Marcinkiewicz-féle magfüggvények normái egyenletesen korlátosak, vagyis*

$$\|K_n\|_1 \leq c.$$

A 2.3.1. Tétel bizonyításához felhasznált utolsó lemma a $\sigma^* f := \sup_n |\sigma_n f|$ maximál operátor kvázi-lokális tulajdonságát mondja ki.

2.3.3. Lemma (Blahota, Gát [17]). *Ha* $f \in L^1(I^2)$, $\operatorname{supp} f \subseteq I_m(u^1) \times I_m(u^2)$, *valamint még* $\int\limits_{I_m(u^1)\times I_m(u^2)} f(x^1, x^2)\, dx^1 dx^2 = 0$ *is teljesül valamely* $u := (u^1, u^2) \in I^2$ *esetén, akkor*

$$\int\limits_{\overline{I_m(u^1)\times I_m(u^2)}} \sigma^* f\left(x^1, x^2\right) dx^1 dx^2 \leq c\|f\|_1.$$

3. Fourier-közepek maximál operátorai

3.1. d-dimenziós Walsh–Fourier-sorok

Jelölje Z_2 a 2 rendű ciklikus csoportot, vagyis legyen $Z_2 := \{0,1\}$, ahol a csoportművelet a modulo 2 összeadás és minden részhalmaz nyílt. Származzon a Haar-mérték Z_2-n abból, hogy az egyelemű halmazok mértéke $1/2$. Legyen G megszámlálhatóan végleten számosságú Z_2 csoport teljes direkt szorzata. Tekintsük G elemeit, mint $x = (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ sorozatokat, ahol $x_k \in \{0,1\} (k \in \mathbb{N})$. A csoportművelet G-n a koordinátánkénti Z_2 összeadás, a mérték (jelöljük μ-vel) a szorzatmérték és a topológia a szorzattopológia. A G kompakt Abel-csoportot Walsh-csoportnak nevezzük. A G topologikus tér egy bázisát megadhatjuk a következő módon:

$$I_0(x) := G,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m : y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\},$$

ahol $x \in G$ és $n \in \mathbb{N}$. Ezeket a halmazokat diadikus intervallumoknak nevezzük. Jelölje $0 := (0 : i \in \mathbb{N})$ a G nullelemét, továbbá legyen $I_n := I_n(0)\,(n \in \mathbb{N})$. Jelölje

$$r_k(x) := (-1)^{x_k}$$

a k-adik Rademacher-függvényt, amennyiben $k \in \mathbb{N}$ és $x \in G$. A diadikus d-dimenziós téglák legyenek a következőek:

$$I_n(x_1, \dots, x_d) := I_n(x_1) \times \dots \times I_n(x_d).$$

Az $\left\{I_n(x_1, \dots, x_d) : (x_1, \dots, x_d) \in G^d\right\}$ diadikus téglák által generált σ-algebrát jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel. A G^d rövidítést $G \times \dots \times G$ (vagyis d számú G csoport direkt szorzata) helyett vezettük be.

A mérték G^d-n a szorzatmérték legyen. Az $L^p(G^d)$-tér normáját (ami $0 < p < 1$ esetén csak kvázinorma) az alábbi módon definiáljuk:

$$\|f\|_p := \left(\int_{G^d} |f(x_1, \dots, x_d)|^p d\mu(x_1, \dots, x_d) \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty).$$

Jelölje $f := \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ az $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ σ-algebra sorozatra vonatkozó egyparaméteres martingált (a részletekért lásd Weisz [66, 72] cikkeit). Az f martingál maximál függvényét az alábbi módon definiáljuk:

$$f^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|f^{(n)}\right|.$$

Abban az esetben, amikor $f \in L^1(G^d)$, a maximál függvényt úgy definiálhatjuk, hogy

$$f^*(x_1, \ldots, x_d) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\mu(I_n(x_1, \ldots, x_d))} \left| \int\limits_{I_n(x_1,\ldots,x_d)} f(u_1, \ldots, u_d) d\mu(u_1, \ldots, u_d) \right|,$$

ahol $(x_1, \ldots, x_d) \in G^d$. Amennyiben $0 < p < \infty$, a $H^p(G^d)$ martingál Hardy-tér azokból a martingálokból áll, melyekre

$$\|f\|_{H^p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

Az

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(f^{(n)} - f^{(n-1)} \right)$$

martingál konjugált transzformáltját az alábbi martingállal definiáljuk:

$$\widetilde{f}^{(t)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \left(f^{(n)} - f^{(n-1)} \right),$$

ahol $t \in G$ rögzített. Megjegyezzük, hogy $\widetilde{f}^{(0)} = f$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor $n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, ahol $n_i \in \{0, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$, vagyis n-et felírtuk 2-es számrendszeri alakjában. Legyen továbbá $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$, vagyis $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

A Walsh–Paley-rendszert a Walsh–Paley-függvények sorozataként definiáljuk:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \quad (x \in G, n \in \mathbb{P}).$$

Az n-edik Walsh–Dirichlet magfüggvény legyen az alábbi:

$$D_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x).$$

Ismert (lásd például Schipp, Wade, Simon és Pál [60] könyvét), hogy

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, \text{ha } x \in I_n, \\ 0, \ \ \text{ha } x \in G \backslash I_n. \end{cases}$$

A d-dimenziós Walsh–Fourier-sorok részletösszegeit az alábbi módon definiáljuk:

$$S_{M_1,\dots,M_d} f(x_1,\dots,x_d) := \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{M_d-1} \widehat{f}(i_1,\dots,i_d) \prod_{j=1}^{d} w_{i_j}(x_j),$$

ahol

$$\widehat{f}(i_1,\dots,i_d) := \int_{G^d} f(x_1,\dots,x_d) \prod_{j=1}^{d} w_{i_j}(x_j) d\mu(x_1,\dots,x_d)$$

az f függvény $(i_1,\dots,i_d)$-edik Walsh–Fourier-együtthatója. Ha $f \in L^1(G^d)$, akkor belátható, hogy az $(S_{2^n,\dots,2^n} f : n \in \mathbb{N})$ sorozat egy martingál. Ha f egy martingál, vagyis $f = (f^{(n)} : n \in \mathbb{N})$, akkor is tudunk Walsh–Fourier együtthatókat definiálni:

$$\widehat{f}(i_1,\dots,i_d) := \lim_{k\to\infty} \int_{G^d} f^{(k)}(x_1,\dots,x_d) \prod_{j=1}^{d} w_{i_j}(x_j) d\mu(x_1,\dots,x_d).$$

Igazolható, hogy az $f \in L^1(G^d)$ függvény Walsh–Fourier-együtthatói ugyanazok lesznek, mint az f-ből származó $(S_{2^n,\dots,2^n}(f) : n \in \mathbb{N})$ martingál Walsh–Fourier-együtthatói.

Amennyiben $n \in \mathbb{P}$, az f martingál d-dimenziós Walsh–Fourier-sorának n-ed rendű (C,α)-közepe a következő:

$$\sigma_n^\alpha f(x_1,\dots,x_d) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}^{\alpha-1} S_{j,\dots,j} f(x_1,\dots,x_d),$$

ahol

$$A_n^\alpha := \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha \neq -1,-2,\dots).$$

Könnyű látni, hogy

$$\sigma_n^\alpha f(x_1,\dots,x_d) = \int_{G^d} f(u_1,\dots,u_d) K_n^\alpha(x_1+u_1,\dots,x_d+u_d) d\mu(u_1,\dots,u_d),$$

ahol

$$K_n^\alpha(x_1,\dots,x_d) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{d} D_j(x_i).$$

Legyen

$$\rho_{0,\dots,0} := r_0, \quad \rho_{i_1,\dots,i_d} := r_j,$$

ha $i_k \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$, és legalább az egyik $i_l \in \{2^{j-1}, \dots, 2^j - 1\}$. Ekkor az $(M_1, \dots, M_d)$-edik konjugált transzformációs részletösszeg legyen

$$\widetilde{S}^{(t)}_{M_1,\dots,M_d} f(x_1, \dots, x_d) := \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{M_d-1} \rho_{i_1,\dots,i_d}(t) \widehat{f}(i_1, \dots, i_d) \prod_{j=1}^{d} w_{i_j}(x_j).$$

Az f martingál konjugált (C, α)-közepét az alábbi módon vezetjük be:

$$\widetilde{\sigma}^{\alpha,(t)}_n f(x_1, \dots, x_d) := \frac{1}{A^\alpha_n} \sum_{j=0}^{n-1} A^{\alpha-1}_{n-j} \widetilde{S}^{(t)}_{j,\dots,j} f(x_1, \dots, x_d).$$

Világos, hogy $\widetilde{\sigma}^{\alpha,(0)}_n f = \sigma^\alpha_n f$. Legyen a maximál operátor és a konjugált maximál operátor

$$\sigma^\alpha_* f := \sup_n |\sigma^\alpha_n f|, \text{ illetve } \widetilde{\sigma}^{\alpha,(t)}_* f := \sup_n |\widetilde{\sigma}^{\alpha,(t)}_n f|.$$

Az a korlátos és mérhető függvényt p-atomnak nevezzük, ha létezik egy I' diadikus intervallum d-edik direkt hatványaként keletkező $I' \times \cdots \times I'$ diadikus d-dimenziós kocka úgy, hogy

a) $\int\limits_{I' \times \cdots \times I'} a d\mu = 0,$

b) $\|a\|_\infty \le \mu(I' \times \cdots \times I')^{-1/p},$

c) $\operatorname{supp} a \subset I' \times \cdots \times I'.$

Az atomos felbontással kapcsolatos alapvető eredmény a következő.

3.1.1. Tétel (Weisz [72]). *Egy $f = (f^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ martingál akkor és csak akkor eleme a $H^p(G^d)$-térnek $(0 < p \le 1)$, ha létezik p-atomok $(a_k, k \in \mathbb{N})$ sorozata és $(\mu_k, k \in \mathbb{N})$ valós számsorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n,\dots,2^n} a_k = f^{(n)},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty.$$

Sőt

$$\|f\|_{H^p} \sim \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p \right)^{1/p}.$$

3.2. (C,α)-közepek maximál operátorai

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[18] Blahota, I., Goginava, U., *The martingale Hardy type inequality for the maximal operator of the (C,α) means of cubic partial sums of the d-dimensional conjugate Walsh–Fourier series*, Mathematica Pannonica, 21/1, 2010, 65-76.

Marcinkiewicz [45] igazolta 1939-ben, hogy a

$$\sigma_n^1 f := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} S_{j,j}f$$

Marcinkiewicz–Fejér-közepek, ahol $S_{j,j}f$-fel az f függvény kétdimenziós trigonometrikus Fourier-részletösszegeit jelöltük, minden $f \in L\log L([0,2\pi]^2)$ esetén majdnem mindenütt konvergálnak f-hez, amint $n\to\infty$.

Ezt az eredményt Zhizhiashvili [74] általánosította, bebizonyítva, hogy minden $f\in L^1([0,2\pi]^2)$ esetén a

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}^{\alpha-1} S_{j,j}f, \quad \alpha>0$$

úgynevezett (C,α)-közepek majdnem mindenütt konvergálnak f-hez, amint $n\to\infty$.

A következő, kétdimenziós Walsh–Fourier-sorok Marcinkiewicz–Fejér-közepeire vonatkozó állítást Weisz [71] bizonyította.

3.2.1. Tétel (Weisz [71]). *Legyen $p>2/3$. Ekkor a σ_*^1 és $\widetilde{\sigma}_*^{1,(t)}$ maximál operátorok korlátosak $H^p(G^2)$ Hardy-térből az $L^p(G^2)$-térbe.*

Itt G^2-vel a $G\times G$ csoportot rövidítettük. Weisz eredményét Goginava [36] d-dimenziós Walsh–Fourier-sorokra általánosította. Belátta, hogy amennyiben $p>d/(d+1)$, a σ_*^1 maximál operátor korlátos a $H^p(G^d)$ d-dimenziós diadikus martingál Hardy-térből az $L^p(G^d)$-térbe, valamint gyengén $(1,1)$ típusú. Igazolta továbbá [37], hogy a σ_*^1 maximál operátor a $H^p(G^d)$-térből az $L^p(G^d)$-térbe történő korlátosságához a $p>d/(d+1)$ feltétel elengedhetetlen.

Szintén Goginava [38] bizonyította, hogy amennyiben $p>d/(d+\alpha)$, a d-dimenziós Walsh–Fourier-sor részletösszegei (C,α)-közepeinek σ_*^α $(0<\alpha<1)$ maximál operátora korlátos a $H^p(G^d)$ d-dimenziós diadikus martingál Hardy-térből az $L^p(G^d)$-térbe, valamint hogy a korlátosság teljesüléséhez a $p>d/(d+\alpha)$ feltétel szükséges is.

Az elégséges feltétellel kapcsolatban analóg állítás teljesül konjugált maximál operátorokra is (lásd Weisz [71] cikkét). Nevezetesen, amikor $p > d/(d+\alpha)$, akkor a d-dimenziós Walsh–Fourier-sor részletösszegei (C,α)-közepeinek $\widetilde{\sigma}_*^{\alpha,(t)}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ konjugált maximál operátora korlátos a $H^p(G^d)$ d-dimenziós diadikus martingál Hardy-térből az $L^p(G^d)$-térbe.

Az alfejezet fő eredménye a következő:

3.2.2. Tétel (Blahota, Goginava [18]). *Ha $0 < p \leq d/(d+\alpha)$, akkor létezik $f \in H^p(G^d)$ martingál, melyre*

$$\left\|\widetilde{\sigma}_*^{\alpha,(t)} f\right\|_p = \infty.$$

Megjegyezzük, hogy a 3.2.2. Tétel $\alpha = 1$ és $d = 2$ választással választ ad Weisz [71] $p = 2/3$ esetre vonatkozó kérdésére.

3.2.1. Következmény (Blahota, Goginava [18]). *Amennyiben $0 < p \leq d/(d+\alpha)$, akkor létezik $f \in H^p(G^d)$ martingál, melyre*

$$\left\|\sigma_*^{\alpha} f\right\|_p = \infty.$$

3.3. Egy- és kétdimenziós Vilenkin-rendszerek

Jelölje $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozatát. Legyen $Z_{m_k} := \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ egészek additív csoportja modulo m_k. Definiáljuk a G_m Vilenkin-csoportot a Z_{m_k} csoportok teljes direkt szorzataként, ellátva a Z_{m_k} diszkrét topológiák szorzatával.

A G_m-em értelmezett μ mérték legyen a

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in Z_{m_k})$$

mértékek szorzata. A keletkezett μ szorzatmérték Haar-mérték G_m-en, valamint $\mu(G_m) = 1$.

Ha az m sorozat korlátos, G_m-et korlátos Vilenkin-csoportnak, egyébként nemkorlátos Vilenkin-csoportnak nevezzük. A G_m csoport elemit sorozatokkal reprezentálhatjuk a következőképpen: $x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ $(x_k \in Z_{m_k})$. A G_m topologikus tér egy bázisa:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m : y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\},$$

ahol $x \in G_m, n \in \mathbb{N}$. Legyen $I_n := I_n(0),\ n \in \mathbb{P}$.

Definiáljuk m-en az úgynevezett általánosított számrendszert: $M_0 := 1$, $M_{k+1} := m_k M_k (k \in \mathbb{N})$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen előállítható, mint $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, ahol $n_k \in G_{m_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ és csak véges számú n_k különbözik nullától.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $n \in \mathbb{P}$ esetén $|n| := \max\{k \in \mathbb{N} : n_k \neq 0\}$ (vagyis $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$), $n^{(j)} = \sum_{k=j}^{\infty} n_k M_k$.

Jelölje $L^p(G_m)$ a szokásos (egydimenziós) Lebesgue-teret ($\|\cdot\|_p$ a kapcsolódó norma) $(1 \leq p \leq \infty)$.

A továbbiakban bevezetünk G_m-en egy Vilenkin-rendszernek nevezett ortonormált rendszert. Először definiáljuk az $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$ általánosított Rademacher-függvényeket a következőképpen:

$$r_k(x) := \exp \frac{2\pi \imath x_k}{m_k} \ (x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}).$$

$\mathbb{C}$-vel a komplex számok halmazát jelöltük. Legyen

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ rendszert Vilenkin-rendszernek nevezzük G_m-en.

Amennyiben $m \equiv 2$, a Walsh–Paley-rendszert kapjuk.

Vilenkin [64] belátta, hogy a később róla elnevezett rendszer ortonormált és teljes $L^1(G_m)$-ben.

Vezessük be a Fourier-analízis szokásos fogalmait. Ha $f \in L^1(G_m)$, akkor a Fourier-együtthatók:

$$\widehat{f}(k) := \int_{G_m} f(x)\bar{\psi}_k(x) d\mu(x) \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

a részletösszegek:

$$S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\psi_k(x) \qquad (n \in \mathbb{P},\ S_0 f(x) :\equiv 0),$$

a Fejér-közepek:

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n f(x) \qquad (n \in \mathbb{P}),$$

a Dirichlet-féle magfüggvények:

$$D_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \qquad (n \in \mathbb{P}),$$

a Fejér-féle magfüggvények:

$$K_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \qquad (n \in \mathbb{P}).$$

Az $L^p(G_m)$ normát (ami $0 < p < 1$ esetén csak kvázinorma) a szokott módon értelmezzük:

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{G_m} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty).$$

Az $\{I_n(x) : (x) \in G_m\}$ intervallumok által generált σ-algebrát $\mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N})$ fogja jelölni.

A következő meghatározások a 3.1. alfejezetben bevezetett fogalmak egydimenziós Vilenkin-rendszerre alkalmazott analógiái. Legyen $f = (f^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ az $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ σ-algebrához tartozó martingál. Az f martingál maximál függvénye legyen

$$f^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f^{(n)} \right|.$$

Amennyiben $f \in L^1(G_m)$, maximál függvénye a következőképpen adható meg:

$$f^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int\limits_{I_n(x)} f(u) d\mu(u) \right|.$$

Ha $0 < p < \infty$, akkor a $H^p(G_m)$ Hardy martingál tér az olyan martingálokból áll, melyekre

$$\|f\|_{H^p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

Ha $f \in L^1(G_m)$, akkor könnyű megmutatni, hogy az $(S_{M_n} f : n \in \mathbb{N})$ sorozat egy martingál. Ha f egy martingál, vagyis $f = (f^{(n)} : n \in \mathbb{N})$, akkor is tudunk Vilenkin–Fourier-együtthatókat definiálni:

$$\widehat{f}(i) := \lim_{k \to \infty} \int\limits_{G_m} f^{(k)}(x) \bar{\psi}_i(x) d\mu(x).$$

Igazolható, hogy az $f \in L^1(G_m)$ Vilenkin–Fourier-együtthatói ugyanazok, mint az f által generált $(S_{M_n} f : n \in \mathbb{N})$ martingál együtthatói.

Az f martingál Fejér-közepeinek maximál operátorait definiáljuk a következőképpen:

$$\sigma^* f(x) := \sup_{n \in \mathbb{P}} |\sigma_n f(x)|.$$

A kettős Vilenkin–Fourier-sorok téglány részletösszegét a következőképpen definiáljuk:

$$S_{M,N}f\left(x^1,x^2\right):=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}\widehat{f}(i,j)\psi_i\left(x^1\right)\psi_j\left(x^2\right),$$

ahol

$$\widehat{f}(i,j):=\int\limits_{G_m^2} f\left(x^1,x^2\right)\bar{\psi}_i(x^1)\bar{\psi}_j(x^2)d\mu\left(x^1,x^2\right)$$

az f függvény (i,j)-edik Vilenkin–Fourier-együtthatója. Itt G_m^2-tel a $G_m\times G_m$ csoport jelölését rövidítettük. A mérték G_m^2-en a szorzatmérték legyen.

Az $L^p(G_m^2)$ normát (ami $0<p<1$ esetén csak kvázinorma) a szokott módon értelmezzük:

$$\|f\|_p:=\left(\int\limits_{G_m^2}|f\left(x^1,x^2\right)|^p d\mu\left(x^1,x^2\right)\right)^{1/p}\qquad(0<p<\infty).$$

A weak-$L^p(G_m^2)$-tér azokból az f mérhető függvényekből áll, melyekre

$$\|f\|_{\text{weak-}L^p(G_m^2)}:=\sup_{\lambda>0}\lambda\cdot\mu(|f\left(x^1,x^2\right)|>\lambda)^{1/p}<\infty.$$

Legyen

$$I_{n,k}\left(x^1,x^2\right):=I_n\left(x^1\right)\times I_k\left(x^2\right).$$

Az $\{I_{n,k}\left(x^1,x^2\right):\left(x^1,x^2\right)\in G_m^2\}$ diadikus téglalapok által generált σ-algebrát jelöljük $\mathcal{F}_{n,k}(n,k\in\mathbb{N})$-val. Jelölje továbbá $f:=(f^{(n,k)},n,k\in\mathbb{N})$ az $(\mathcal{F}_{n,k},n,k\in\mathbb{N})$-ra vonatkozó martingált (a részletekért lásd például Weisz [66, 72] munkáit).

Az f martingál maximál és diagonál (átlós) maximál függvényét rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$f^*:=\sup_{n,k\in\mathbb{N}}\left|f^{(n,k)}\right|,\quad f^{\square}:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|f^{(n,n)}\right|.$$

Amennyiben $f\in L^1(G_m^2)$, a maximál és diagonál maximál függvényeket a következőképpen adjuk meg:

$$f^*\left(x^1,x^2\right):=\sup_{n,k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\mu(I_{n,k}\left(x^1,x^2\right))}\left|\int\limits_{I_{n,k}(x^1,x^2)}f\left(u^1,u^2\right)d\mu\left(u^1,u^2\right)\right|,$$

illetve

$$f^{\square}\left(x^1,x^2\right):=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\mu(I_{n,n}\left(x^1,x^2\right))}\left|\int\limits_{I_{n,n}(x^1,x^2)} f\left(u^1,u^2\right)d\mu\left(u^1,u^2\right)\right|,$$

ahol $(x^1,x^2)\in G_m^2$.

Amennyiben $0<p<\infty$, a $H^p(G_m^2)$ martingál Hardy-tér és a $H^{p\square}(G_m^2)$ diagonál martingál Hardy-tér rendre azokból a martingálokból áll, melyekre

$$\|f\|_{H^p}:=\|f^*\|_p<\infty$$

és

$$\|f\|_{H^{p\square}}:=\left\|f^{\square}\right\|_p<\infty,$$

teljesül.

Ha $f\in L^1(G_m^2)$, akkor a $(S_{M_n,M_k}f:n,k\in\mathbb{N})$ kettős sorozat egy martingál. Ha f egy martingál, vagyis $f=(f^{(n,k)}:n,k\in\mathbb{N},)$ akkor Vilenkin–Fourier-együtthatóit az alábbi módon definiáljuk:

$$\widehat{f}(i,j):=\lim_{\min(k,l)\to\infty}\int\limits_{G_m^2} f^{(k,l)}\left(x^1,x^2\right)\bar{\psi}_i\left(x^1\right)\bar{\psi}_j\left(x^2\right)d\mu\left(x^1,x^2\right).$$

Az $f\in L^1(G_m^2)$ függvény Vilenkin–Fourier-együtthatói ugyanazok, mint f-ből származtató $(S_{M_n,M_k}f:n,k\in\mathbb{N})$ martingál Vilenkin–Fourier-együtthatói. Az f martingál (n,k)-ad rendű $(n,k\in\mathbb{P})$ kettős Vilenkin–Fejér-közepe legyen

$$\sigma_{n,k}f\left(x^1,x^2\right):=\frac{1}{nk}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}S_{i,j}f\left(x^1,x^2\right).$$

Az f martingál kétdimenziós Fejér-közepeinek többféle maximál operátorai közül bevezetjük a megszorítatlan, a kúposan megszorított és a diagonál maximál operátorokat. Nevezetesen legyen

$$\sigma^*f\left(x^1,x^2\right):=\sup_{n,k\in\mathbb{P}}|\sigma_{n,k}f\left(x^1,x^2\right)|,$$

$$\sigma_\lambda^*f\left(x^1,x^2\right):=\sup_{1/M_\lambda\le n/k\le M_\lambda}|\sigma_{n,k}f\left(x^1,x^2\right)|,$$

$$\sigma_0^*f\left(x^1,x^2\right):=\sup_{n\in\mathbb{P}}\left|\sigma_{n,n}f\left(x^1,x^2\right)\right|.$$

3.4. Fejér-közepek maximál operátorai

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikkek eredményeit tartalmazza:

[13] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of Vilenkin–Fourier series*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7/4, 2006, 149.

[14] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin–Fourier series*, Colloquium Mathematicum, 107/2, 2007, 287-296.

A

$$\mu(\sigma^* f > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1 \quad (\lambda > 0)$$

gyenge (weak) típusú egyenlőtlenség egydimenziós változatát trigonometrikus sorokra Zygmund [75], Walsh-sorokra Schipp [57], korlátos Vilenkin-esetben pedig Pál és Simon [52] cikkében találjuk.

Szintén egy dimenzióban Fujji [24] (Walsh–Paley-rendszeren) és Simon [55] (Vilenkin-rendszeren) bizonyította, hogy a σ^* operátor korlátos H^1-ből L^1-be. Ezt az eredményt Weisz [68, 69] (Walsh–Paley-rendszeren, illetve Vilenkin-rendszerre) általánosította, bebizonyítva σ^* korlátosságát a H^p martingál Hardy-térből L^p-be, amennyiben $p > 1/2$. Simon [56] ellenpéldája (Walsh–Paley-rendszeren) megmutatta, hogy a korlátosság nem áll fenn a $0 < p < 1/2$ esetben. Egy $p = 1/2$-re vonatkozó állítás a következő:

3.4.1. Tétel (Weisz [73]). *Walsh–Paley-rendszer esetén a σ^* maximál operátor korlátos a $H^{1/2}(G)$ Hardy-térből a weak-$L^{1/2}(G)$-térbe.*

Ebből interpolációval következik, hogy minden $0 < p < 1/2$ esetén σ^* nem korlátos $H^p(G)$-ből a weak-$L^p(G)$-térbe.

Az alfejezet egyik fő eredménye – amely a témakör utolsó nyitott kérdését is megválaszolta – a következő:

3.4.2. Tétel (Blahota, Gát, Goginava [13]). *Tetszőleges korlátos Vilenkin-rendszer esetén a σ^* maximál operátor nem korlátos a $H^{1/2}(G_m)$ Hardy-térből az $L^{1/2}(G_m)$-térbe.*

Kétdimenziós Vilenkin–Fourier-sorokra a következő tételek voltak ismertek:

3.4.3. Tétel (Weisz [67]). *Ha $p > 1/2$, akkor a σ_λ^* maximál operátor korlátos a $H^{p\square}(G_m)$ Hardy-térből az $L^p(G_m)$-térbe.*

3.4.4. Tétel (Weisz [70]). *Ha $p > 1/2$, akkor a σ^* maximál operátor korlátos a $H^p(G_m)$ Hardy-térből az $L^p(G_m)$-térbe.*

Beláttuk, hogy korlátos Vilenkin-rendszerre a 3.4.3. és a 3.4.4. Tételekben szereplő $p > 1/2$ feltétel nem csak hogy elégséges, de szükséges is. Sőt igazoltuk az alábbi tételt, melyek az alfejezet másik fő eredménye:

3.4.5. Tétel (Blahota, Gát, Goginava [14]). *Tetszőleges korlátos Vilenkin-rendszer esetén a σ_0^* maximál operátor nem korlátos a $H^{1/2}(G_m)$ Hardy-térből a weak-$L^{1/2}(G_m)$-térbe.*

Figyeljük meg, hogy a 3.4.5. Tétel nem analóg egydimenziós változatával, a 3.4.1. Tétellel, hanem éppen az ellenkezőjét mondja ki!

A tételek bizonyítása során felhasználtuk a következő lemmákat.

3.4.1. Lemma (Gát [28]). *Tegyük fel, hogy $s, t, n \in \mathbb{N}$ és $x \in I_t \backslash I_{t+1}$. Ha $t \leq s \leq |n|$, akkor*

$$(n^{(s+1)} + M_s)K_{n^{(s+1)}+M_s}(x) - n^{(s+1)}K_{n^{(s+1)}}(x) = \begin{cases} M_t M_s \psi_{n^{(s+1)}}(x)\frac{1}{1-r_t(x)}, & \textit{ha } x - x_t e_t \in I_s, \\ 0 & \textit{egyébként,} \end{cases}$$

melyben $e_t := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, ahol a t-edik koordináta 1, a többi 0.

3.4.2. Lemma (Blahota, Gát, Goginava [14]). *Legyen $2 < A \in \mathbb{P}$, $k \leq s < A$ és $n_A^* := M_{2A} + M_{2A-2} + \cdots + M_2 + M_0$. Ekkor*

$$n_{A-1}^* |K_{n_{A-1}^*}(x)| \geq \frac{M_{2k} M_{2s}}{4}$$

amennyiben $x \in I_{2A}(0, \ldots, 0, x_{2k} \neq 0, 0, \ldots, 0, x_{2s} \neq 0, x_{2s+1}, \ldots, x_{2A-1})$, $k = 0, 1, \ldots, A-3$ és $s = k+2, k+3, \ldots, A-1$.

3.5. Marcinkiewicz-közepek maximál operátorai

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[15] Blahota, I., Goginava, U., *The maximal operator of the Marcinkiewicz–Fejér means of the 2-dimensional Vilenkin–Fourier series*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 45/3, 2008, 321-331.

Ahogy arról a 3.2. alfejezetben már volt szó, a kétdimenziós Walsh–Fourier-esetben Weisz [71] belátta, hogy a

$$\sup_{n\in\mathbb{P}} \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} S_{j,j} f\right|$$

maximál operátor $p > 2/3$ esetén korlátos a $H^p(G^2)$ kétdimenziós diadikus martingál Hardy-térből az $L^p(G^2)$-térbe (lásd a 3.2.1. Tételt).

Weisz eredményét Vilenkin-rendszerre Goginava általánosította, igazolva a következő tételt.

3.5.1. Tétel (Goginava [39]). *Ha teljesül a $p > 2/3$ feltétel, a korlátos kettős Vilenkin-rendszerből származó kétdimenziós Vilenkin–Fourier-sorok Marcinkiewicz-közepeinek σ^* maximál operátora korlátos a $H^p(G_m^2)$ Hardy-térből az $L^p(G_m^2)$-térbe.*

Az alfejezet fő eredménye a következő:

3.5.2. Tétel (Blahota, Goginava [15]). *A korlátos kettős Vilenkin-rendszerből származó kétdimenziós Vilenkin–Fourier-sorok Marcinkiewicz-közepeinek σ^* maximál operátora nem korlátos a $H^{2/3}(G_m^2)$-térből az $L^{2/3}(G_m^2)$-térbe.*

A 3.5.1. és a 3.5.2. Tételek együtt azt jelentik, hogy kétdimenziós Vilenkin–Fourier sorok esetén (szemléletes jelölést használva) a $\|\sigma^*\|_{H^p(G^2)\to L^p(G^2)} < \infty$ és a $p > 2/3$ feltételek ekvivalensek.

A 3.5.2. Tétel bizonyítása során felhasználtuk a következő lemmát:

3.5.1. Lemma (Blahota, Goginava [15]). *Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\int\limits_{G_m^2} \max_{1\le N\le M_n} (N\,|K_N(x_1,x_2)|)^{2/3} d\mu(x_1,x_2) \ge c\frac{n+1}{\log(n+2)}.$$

4. Nörlund logaritmikus közepek normakonvergenciája nemkorlátos Vilenkin-rendszereken

4.1. Nemkorlátos Vilenkin-rendszerek

A Walsh–Paley-rendszerre igazolt állítások sok esetben analóg módon általánosíthatóak korlátos Vilenkin-rendszerekre. Nemkorlátos Vilenkin-rendszereket vizsgálva azonban (vagyis amikor a generáló m sorozat nem korlátos) gyakran mást tapasztalunk. Ami igaz korlátos Vilenkin-rendszerre, nem mindig igaz nemkorlátos esetben, és ha az állítás mégis teljesül, bizonyítása többnyire jóval összetettebb, mint a korlátos analógia esetén.

A 4. fejezet során G_m legyen tetszőleges (tehát nem feltétlenül korlátos) Vilenkin-csoport.

4.2. Nörlund logaritmikus közepek normakonvergenciája

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[16] Blahota, I., Gát, G., *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Analysis in Theory and Applications, 24/1, 2008, 1-17.

Az alfejezet egyik fő eredménye a következő:

4.2.1. Tétel (Blahota, Gát [16]). *Ha* $f \in L^p(G_m)$ $(1 \le p < \infty)$ *és*

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \log^2 m_k}{\log M_n} < \infty,$$

akkor

$$\|t_{M_n} f - f\|_p \to 0.$$

Ha f folytonos, a konvergencia szuprémum normában áll fenn.

Korábban úgy gondoltuk, hogy a Fejér-közepek „jobban viselkednek”, mint a Nörlund logaritmikus közepek. Egyrészt közismertek a Fejér-közepek jó tulajdonságai: trigonometrikus, Walsh–Paley-féle és több más általános rendszeren is teljesül, hogy az integrálható függvények Fejér-közepei normában és pontonként is tartanak a függvényhez. Másrészt a Nörlund logaritmikus közepekre számos divergencia-példa létezik (egy és több dimenzióban is). Például Gát és Goginava belátta, hogy Walsh–Paley-rendszeren nem minden integrálható függvény Nörlund logaritmikus közepe konvergál a függvényhez, sem normában (lásd [31]), sem pontonként (lásd [32]).

Bebizonyosodott azonban, hogy nemkorlátos Vilenkin-rendszerek esetén a helyzet más. Egyrészt Price [53] igazolta, hogy $\forall m$ nemkorlátos sorozat esetén $\exists f \in L^1(G_m)$ úgy, hogy

$$\|\sigma_{M_n} f - f\|_1 \not\to 0,$$

másrészt viszont a 4.2.1. Tétel azt jelenti, hogy $\exists m$ nemkorlátos sorozat, melyre $\forall f \in L^1(G_m)$ esetén

$$\|t_{M_n} f - f\|_1 \to 0.$$

A 4.2.1. Tétel bizonyításához a következő négy lemmát használtuk fel.

4.2.1. Lemma (Blahota, Gát [16]). *Legyen $1 \leq j \leq M_k - 1$ és $x \in G_m$. Ekkor*

$$D_{M_k - j}(x) = D_{M_k}(x) - \bar{\psi}_{M_k - 1}(-x) D_j(-x).$$

A 4.2.2. és a 4.2.3. Lemma önmagában is érdekes, hiszen korábban semmilyen általános becslés nem volt ismert Fejér-féle magfüggvényekre nemkorlátos Vilenkin-esetben.

4.2.2. Lemma (Blahota, Gát [16]). *Ha $\log m_n = O(n^\delta)$, akkor tetszőleges $\delta > 0$ esetén*

$$\|K_n\|_1 = O(|n|^\delta).$$

4.2.3. Lemma (Blahota, Gát [16]). *Legyen $\alpha_k := \frac{1}{M_k} \sum_{t=0}^{k-1} M_{t+1} \log m_t$. Ekkor*

$$\|K_n\|_1 \leq c \sum_{i=0}^{|n|+1} \frac{\alpha_{|n|+1-i}}{2^i}.$$

4.2.4. Lemma (Blahota, Gát [16]).

$$\|F_{M_n}\|_1 \leq c \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \log^2 m_k}{\log M_n}$$

Az alfejezetben található másik fő eredmény egy negatív állítás.

4.2.2. Tétel (Blahota, Gát [16]). *Ha $\log m_n = O(n^\delta)$ valamely $0 < \delta < 1/2$ esetén, akkor $\exists f \in L^1(G_m)$, melyre*

$$\|t_n f - f\|_1 \not\to 0.$$

A tétel bizonyításának alapját képező ellenpéldát az alábbi lemma adja.

4.2.5. Lemma (Blahota, Gát [16]). *Legyen* $p_A := M_{2A} + M_{2A-2} + \cdots + M_0$. *Ha* $\log m_n = O(n^{\delta})$ *valamely* $0 < \delta < 1/2$ *esetén, akkor*

$$\|F_{p_A}\|_1 \geq c_\beta A^\beta,$$

amennyiben $0 < \beta < 1 - \delta$.

A 4.2.1. és a 4.2.2. Tétel feltételeinek egyszerre megfelelő m_k nemkorlátos sorozatra az alábbiakban láthatunk példát.

4.2.1. Példa (Blahota, Gát [16]). *Legyen*

$$m_k := \begin{cases} \left[\exp(k^{\frac{1}{4}})\right], & \text{ha } k = j^2 \text{ tetszőleges } j \in \mathbb{P} \text{ esetén,} \\ 2 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez esetben teljesülnek az alábbi állítások:

a) $\limsup\limits_{k\in\mathbb{N}} m_k = \infty$

b) $\log m_k = O(k^{\frac{1}{4}})$

c) $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} \log^2 m_k}{\log M_n} < \infty.$

5. Magfüggvények vizsgálata általánosított Vilenkin-rendszereken

5.1. Reprezentatív szorzatrendszerek

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ most is 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Jelöljön G_{m_k} egy m_k, $(k \in \mathbb{N})$ rendű véges (nem szükségszerűen kommutatív) csoportot. Legyen a mérték G_{m_k}-n a következő:

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in G_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Legyen G a G_{m_k} halmazok teljes direkt szorzata a topológiák és mértékek μ szorzatával ellátva. Ekkor G teljesen széteső csoport, a szorzatmérték pedig egy egyre normált Haar-mérték lesz.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G-t korlátos csoportnak, egyébként nemkorlátos csoportnak nevezzük.

A G csoport elemeit sorozatokkal reprezentálhatjuk: $x := (x_0, x_1, \dots)$. A G topologikus tér egy bázisát könnyen megadhatjuk az alábbi módon:

$$I_0(x) := G,$$

$$I_n(x) := \{y \in G : y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

minden $x \in G,\ n \in \mathbb{P}$ esetén.

Ez esetben is az m sorozat által generált általánosított számrendszert használjuk, a szokásos jelölésekkel.

Jelölje Σ_k a G_{m_k} csoport duálisát, azaz G_{m_k} azon folytonos irreducibilis unitér reprezentációit, melyek nem ekvivalensek egymással. Ha $\sigma \in \Sigma_k$, akkor jelölje d_σ a σ reprezentációs terének dimenzióját, valamint legyen $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ ennek rögzített, de tetszőleges ortonormált bázisa. A

$$u_{i,j}^{(\sigma)}(x) := \langle U_x^{(\sigma)} \zeta_i, \zeta_j \rangle \quad (i, j \in \{1, \dots, d_\sigma\},\ x \in G_{m_k})$$

függvényeket az $U^{(\sigma)}$ $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ bázisra vonatkozó koordinátafüggvényeinek nevezzük. Minden $\sigma \in \Sigma_k$-hoz d_σ^2 számú koordinátafüggvény tartozik. Az összes koordinátafüggvények száma m_k.

Legyen $\{\varphi_k^s : 0 \le s < m_k\}$ a G_{m_k} csoport összes normalizált koordinátafüggvényének egy rendszere. Most még nem adjuk meg a φ rendszer sorrendjét, de feltesszük, hogy φ_k^0 mindig az 1 karakter. Így minden $0 \le s < m_k$ esetén létezik $\sigma \in \Sigma_k,\ (i, j \in \{1, \dots, d_\sigma\})$ úgy, hogy

$$\varphi_k^s(x) = \sqrt{d_\sigma} u_{i,j}^{(\sigma)}(x) \quad (x \in G_{m_k}).$$

Legyen ψ a φ_k^s függvények szorzatrendszere, nevezetesen

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \quad (x \in G).$$

Azt mondjuk, hogy ψ a φ reprezentatív szorzatrendszere. A Weyl–Peter-tételből (lásd például Hewitt és Ross [44] könyvét) következik, hogy a ψ rendszer ortonormált és teljes $L^2(G)$-n.

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
φ^0	1	1	1	1	1	1
φ^1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^3	1	-1	-1	-1	1	1
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. ábra. Az $\mathcal{S}_3$ szimmetrikus csoport egy lehetséges rendszere

Legyen $f : G \to \mathbb{C}$ integrálható függvény. Definiáljuk a Fourier-együtthatókat és -részletösszegeket a szokásos módon:

$$\widehat{f}_k := \int_G f(x)\bar{\psi}_k(x)d\mu(x) \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k(x) \quad (n \in \mathbb{P}).$$

A Dirichlet-féle magfüggvényeket most így definiáljuk:

$$D_n(y,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(y)\bar{\psi}_k(x) \qquad (n \in \mathbb{P},\ D_0 :\equiv 0).$$

A reprezentatív szorzatrendszerek a Walsh–Paley- és a Vilenkin-rendszerek egyfajta általánosításainak tekinthetőek (lásd az 1. ábrát).

Vegyük észre azonban, hogy a fenti magfüggvény-definíció nem teljesen analóg a korábban tárgyalt rendszerekével, melyek esetén a Dirichlet-féle magfüggvény egyváltozós volt. Ha a speciálisabb rendszert ϑ-val jelöljük, az „egyirányú” kapcsolat a két koncepció között a következő: $D_n^{\vartheta}(y-x) = D_n(y,x)$.

Könnyű látni, hogy ez esetben

$$S_n f(x) = \int_G f(y) D_n(x, y) d\mu(y).$$

A reprezentatív szorzatrendszeret, mint a Fourier analízis új eszközeit Gát és Toledo [34] vezette be.

5.2. Vilenkin-szerű rendszerek

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ ez esetben is 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Legyen G_{m_k} egy m_k $(k \in \mathbb{N})$ elemszámú halmaz. Definiáljunk egy mértéket a G_{m_k} halmazokon a következőképpen:

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in G_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Legyen G_m a G_{m_k} halmazok teljes direkt szorzata (bármiféle művelet nélkül), szorzattopológiával és μ-vel jelölt szorzatmértékkel ellátva). Akárcsak a korábban bevezetett hasonló definíciók esetén, az így keletkezett szorzatmérték is egy egyre normált Haar-mérték lesz G_m-en. Ha az m korlátos, akkor G_m-et korlátos, egyébként pedig nemkorlátos Vilenkin-térnek nevezzük. A Vilenkin-csoporthoz hasonlóan G_m Vilenkin-tér elemeit is sorozatokkal reprezentálhatjuk: $x := (x_0, x_1, \dots)$ $(x_k \in G_{m_k})$, illetve az alábbi intervallumok itt is a megfelelő topologikus tér egy bázisát alkotják:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m : y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

minden $x \in G_m,\ n \in \mathbb{P}$ esetén.

Jelölje $L^p(G_m)$ a Lebesgue-tereket ($\|\cdot\|_p$ a megfelelő normák) $(1 \le p \le \infty)$, $\mathcal{F}_n$ az $I_n(x)\,(x \in G_m,\ n \in \mathbb{N})$ halmazok által generált σ algebrát, valamint E_n a $\mathcal{F}_n\,(n \in \mathbb{N})$ σ algebrára vonatkozó feltételes várható érték operátort.

Most bevezetünk egy Gát [29] által definiált, Vilenkin-szerűnek nevezett rendszert G_m-en.

Az $r_k^n : G_m \to \mathbb{C}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ függvényeket általánosított Rademacher-függvényeknek nevezzük a G_m Vilenkin-téren, ha rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

i. Az r_k^n $(k, n \in \mathbb{N})$ függvény $\mathcal{F}_{k+1}$ mérhető (vagyis $r_k^n(x)$ csak $x_0, \dots, x_k$-től függ és $r_k^0 = 1$.

ii. Ha M_k osztója n-nek és l-nek, valamint $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ $(k, l, n \in \mathbb{N})$, akkor

$$E_k(r_k^n \bar{r}_k^l) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n_k = l_k, \\ 0 & \text{, ha } n_k \neq l_k. \end{cases}$$

iii. Ha M_k osztója n-nek (vagyis $n = n_k M_k + n_{k+1} M_{k+1} + \dots + n_{|n|} M_{|n|}$), akkor

$$\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r_k^n(x)|^2 = m_k$$

minden $x \in G_m$ esetén.

iv. Létezik $\delta > 1$, melyre $\|r_k^n\|_\infty \leq \sqrt{m_k/\delta}$ minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén.

Definiáljuk a $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ Vilenkin-szerű rendszert a következőképpen

$$\psi_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n^{(k)}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Gát [29] igazolta, hogy a ψ Vilenkin-szerű rendszer ortonormált.

Végül vezessük be a Dirichlet- és Fejér-féle magfüggvényeket:

$$D_n(y, x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(y) \bar{\psi}_k(x) \qquad (n \in \mathbb{P}, \;\; D_0 :\equiv 0),$$

$$K_n(y, x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(y, x) \qquad (n \in \mathbb{N}, \;\; K_0 :\equiv 0).$$

Lássunk néhány ismert példát Vilenkin-szerű rendszerre.

1. A Walsh–Paley- és Vilenkin-rendszerek (lásd például Schipp, Wade, Simon és Pál [60], valamint Vilenkin [64] könyvét).

2. A 2-adikus és annak általánosítása, az m-adikus egészek karakterrendszere (lásd például Schipp és Wade [59], valamint Taibleson [63] könyvét).

3. A Gát és Toledo által bevezetett nemkommutatív Vilenkin-csoportok unitér irreducibilis reprezentációi koordinátafüggvényeinek szorzatrendszere (röviden: reprezentatív szorzatrendszer, lásd például Gát és Toledo [34] cikkét).

4. A Gát által Vilenkin-csoportokon bevezetett $\psi\alpha$-rendszer. Egy speciális esete új eszköznek bizonyult limit periodikus és majdnem páros számelméleti függvények vizsgálatában (lásd például Gát [26] és Blahota [2] cikkét, valamint Mauclaire [47] könyvét).

5. A Schipp által Walsh–Paley-csoporton bevezetett UDMD szorzatrendszer (lásd például Schipp és Wade [58],[59] cikkeit).

Annak bizonyításai, hogy a fent említett rendszerek valóban a Vilenkin-szerű rendszer speciális esetei, Gát [29] cikkében találhatóak.

Az említett rendszerek közti kapcsolatok tanulmányozásához hasznos lehet a bevezető fejezetben található 1. ábra.

5.3. Súlyozott magfüggvények

Ez az alfejezet elsősorban a következő cikk eredményeit tartalmazza:

[19] Blahota, I., *On the L^1 norm of the weighted maximal function of kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Mathematica Pannonica, 23/1, 2012, 1-9.

Walsh–Paley-rendszer esetén jól ismert (lásd [60]), hogy minden $x \neq 0$ esetén $\sup_{n\in\mathbb{N}} |D_n(x)| < \infty$. (Ugyanez egyébként Walsh–Kaczmarz-rendszerre nem igaz.) Ezt a tulajdonságot számos konvergenciatétel bizonyításánál kihasználják. Mi a helyzet a maximál függvény normájával? Könnyű látni (lásd [60]), hogy $\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |D_n(x)| \|_1 = \infty$ Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerre is. Gát [30] vetette fel a következő kérdést: „De mi történik, ha valamilyen súlyozást alkalmazunk?"

Legyen a $\alpha_n \to \mathbb{R}^+$ sorozat monoton növekvő. Definiáljuk a Dirichlet- és Fejér-féle magfüggvények súlyozott maximál függvényeit a következőképpen:

$$D_\alpha(y,x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|D_n(y,x)|}{\alpha_{|n|}}, \qquad K_\alpha(y,x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|K_n(y,x)|}{\alpha_{|n|}} \quad (x, y \in G_m).$$

Gát említett cikkében maga ad szükséges és elégséges feltételt integrálható függvény Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerhez tartozó Dirichlet-féle magfüggvény súlyozott maximál függvényei normájának végességére. Hasonló állítást bizonyít Nagy (lásd [50]) mindkét fent említett rendszeren Fejér-féle magfüggvényekre, és Walsh–Paley-esetben (C,α)-közepekhez tartozó magfüggvényekre is. Mező és Simon (lásd [48]) korlátos Vilenkin-rendszeren adtak szükséges és elégséges feltétel a végességre. Belátták továbbá azt is, hogy a Walsh–Paley-esettel analóg állítás nem igaz nemkorlátos Vilenkin-rendszer esetén.

A következő két lemmában G_m tetszőleges Vilenkin-teret jelöl.

5.3.1. Lemma (Gát [30]). *Legyen $x, y \in G_m$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$D_{M_n}(y,x) = \begin{cases} M_n & , \text{ha } y \in I_n(x), \\ 0 & , \text{ha } y \notin I_n(x). \end{cases}$$

5.3.2. Lemma (Blahota [10]). *Legyen $x \in I_A(y) \backslash I_{A+1}(y)$, ahol $x, y \in G_m$ és $A \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$D_n(y,x) = \sum_{i=0}^{A} M_i \left(\sum_{j=0}^{n_i - 1} r_i^{n^{(i+1)}+jM_i}(y) \bar{r}_i^{n^{(i+1)}+jM_i}(x) \right) \psi_{n^{(i+1)}}(y) \bar{\psi}_{n^{(i+1)}}(x).$$

Az alfejezet további részében az m sorozat legyen korlátos, vagyis G_m jelöljön korlátos Vilenkin-teret. A c_m és C_m konstansok csak az m sorozattól, valójában csak a véges $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n$ számtól függnek.

5.3.1. Következmény (Blahota [19]). *Legyen $x \in I_A(y) \backslash I_{A+1}(y)$, ahol $x, y \in G_m$, $A \in \mathbb{N}$. Ekkor létezik C_m konstans úgy, hogy*

$$|D_n(y,x)| \leq C_m \sum_{i=0}^{A} M_i \left| \psi_{n^{(i+1)}}(y) \bar{\psi}_{n^{(i+1)}}(x) \right|.$$

5.3.2. Következmény (Blahota [19]). *Ha $x, y \in G_m$, $n \in \mathbb{N}$ akkor létezik C_m konstans úgy, hogy*

$$|D_n(y,x)| \leq C_m n.$$

5.3.3. Következmény (Blahota [19]). *Legyen $x \in I_A(y) \backslash I_{A+1}(y)$, ahol $x, y \in G_m$, $A \in \mathbb{N}$. Ekkor létezik C_m konstans úgy, hogy*

$$|D_n(y,x)| \leq C_m M_A.$$

5.3.4. Következmény (Blahota [19]). *Legyen $x, y \in G_m$ és $x \neq y$. Ekkor*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |D_n(y,x)| < \infty.$$

Az alfejezet fő eredménye (amely lényegileg analóg a Walsh–Paley-esettel) a következő:

5.3.1. Tétel (Blahota [19]). *Legyen $y \in G_m$. Ekkor létezik c_m and C_m pozitív konstansok, melyekre*

$$c_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \leq \|R_\alpha(y,\cdot)\|_1 \leq C_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k},$$

ahol $R_\alpha = D_\alpha$ vagy $R_\alpha = K_\alpha$.

5.3.5. Következmény (Blahota [19]). *Ha $y \in G_m$, az $R_\alpha(y,\cdot) \in L^1(G_m)$ reláció akkor és csakis akkor teljesül, ha*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} < \infty,$$

ahol $R_\alpha = D_\alpha$ vagy $R_\alpha = K_\alpha$.

Megjegyezzük, hogy az 5.3.1. Tétel bizonyításában használt alsó becslésekből egyszerűen adódik a következő állítás:

5.3.6. Következmény (Blahota [19]). *Legyen $y \in G_m$. Ekkor*

$$\left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |D_n(y,\cdot)| \right\|_1 = \infty.$$

5.4. Magfüggvények maximál értéke

Ez az alfejezet a következő cikkeredményeit tartalmazza:

[20] Blahota, I., *On the maximal value of Dirichlet and Fejér kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80/3-4, 2012, 503-513.

Jelölje G_m a Vilenkin-teret. Definiáljuk a Dirichlet-, illetve a Fejér-féle magfüggvények maximál érték sorozatát:

$$\mathcal{D}_n := \sup_{x,y\in G_m} |D_n(y,x)| \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \mathcal{K}_n := \sup_{x,y\in G_m} |K_n(y,x)| \quad (n \in \mathbb{P}).$$

5.4.1. Lemma (Blahota [20]). *Ha $R = D$ akkor legyen $n \in \mathbb{N}$, ha $R = K$ akkor legyen $n \in \mathbb{P}$. Ezzel a jelöléssel*

$$\mathcal{R}_n = \sup_{x\in G_m} R_n(x,x).$$

Toledo [62] ezzel analóg állítást igazolt reprezentatív szorzatrendszerekre, bár ő cikkében kizárólag a Dirichlet-féle magfüggvényekkel foglalkozott.

Az 5.3.1. Lemmát felhasználva kapjuk az alábbi állítást.

5.4.1. Következmény (Blahota [20]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

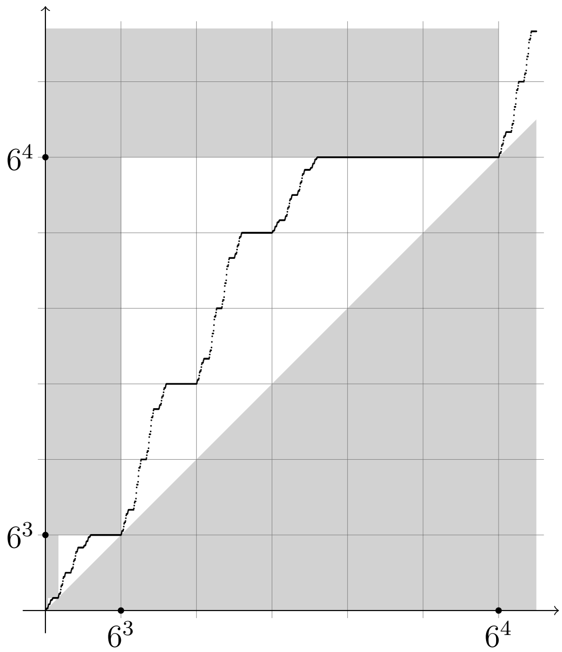
$$\mathcal{D}_{M_n} = M_n.$$

Az eredeti (kommutatív Vilenkin-csoportból származó) Vilenkin-rendszer esetén (és így természetesen a Walsh–Paley-rendszer esetén is) $D_n = n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, hiszen Vilenkin-rendszeren $n = D_n(0) \geq |D_n(x)|$ teljesül minden $x \in G_m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ahogy azt látni fogjuk, a helyzet az általánosabb Vilenkin-tereken, például reprezentatív szorzatrendszerek esetén is különbözik ettől.

5.4.1. Tétel (Blahota [20]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$n \leq D_n \leq M_{|n|+1}.$$

A 2. ábra az $\mathcal{S}_3$ szimmetrikus csoporton értelmezett egyik lehetséges rendszer értékeit mutatja (további részletekért lásd Toledo [62] cikkét). Az ebből a konkrét rendszerből származó D_n sorozat a 3. ábrán látható, a megfelelő K_n sorozat pedig a 4. ábrán. Ez a nemkommutatív rendszer jó példa az alfejezetben szereplő tételek nemtriviális (vagyis az eredeti Vilenkin-rendszer esetén tapasztaltaktól eltérő) eseteire.



3. ábra. $n \leq D_n \leq 6^{|n|+1}$ az $\mathcal{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatán.

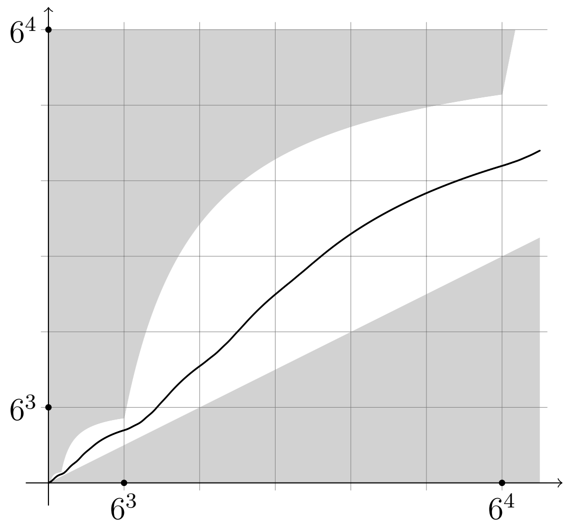
5.4.2. Következmény (Blahota [20]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$1 \leq \frac{D_n}{n} \leq m_{|n|}.$$

Ahogy arról már volt szó korábban, Vilenkin-rendszeren $n = D_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, ahonnan ugyancsak minden $n \in \mathbb{N}$-re $\frac{n-1}{2} = K_n$ is teljesülni fog. Egyéb eseteket itt is általánosabb rendszeren fogunk kapni.

5.4.2. Tétel (Blahota [20]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$\frac{n-1}{2} \le K_n \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M_{|k|+1}.$$



4. ábra. $\frac{n-1}{2} \le K_n \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 6^{|k|+1}$ az $\mathcal{S}_3$ csoportok teljes direkt szorzatán.

5.4.3. Következmény (Blahota [20]). *Legyen $1 < n \in \mathbb{P}$. Ekkor*

$$1 \le \frac{2}{n-1} K_n \le \max_{1 \le k < n} m_{|k|}.$$

5.4.3. Tétel (Blahota [20]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$. A $D_k = k$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén, ha*

$$K_n = \frac{n-1}{2}.$$

5.4.4. Tétel (Blahota [20]). *A D_n sorozat monoton növekvő, a K_n sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Az 5.4.4. Tétel bizonyítása alapján könnyű látni, hogy ha $\inf_{x \in G_m} |\psi_n(x)| > 0$, akkor $D_n < D_{n+1}$. Ez a feltétel fennáll a legtöbb „klasszikus” esetben (például a Walsh–Paley-, eredeti Vilenkin-, valamint a $\psi\alpha$-rendszer esetén is), de könnyen találunk olyan reprezentatív szorzatrendszert, melyben $D_n = D_{n+1}$ bizonyos $n \in \mathbb{N}$-re (lásd a 3. ábrát, vagy Toledo [62] cikkét).

Blahota István publikációs jegyzéke

[1] Blahota, I., *Approximation by Vilenkin–Fourier sums in $L^p(G_m)$*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 13/D, 1992, 35-39.

[2] Blahota, I., *Example for an almost even arithmetical function, the Vilenkin–Fourier series of which diverges everywhere*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 13/D, 1992, 41-45.

[3] Blahota, I., Sarkadi, D., *On an equality of type Hardy-Littlewood with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 13/D, 1992, 51-55.

[4] Blahota, I., *On a theorem of Fridli and Simon with respect to some Vilenkin-like systems*, Bulletins for Applied Mathematics LXV, 1993, 231-238.

[5] Blahota, I., *Relation between Dirichlet kernels with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, XXII, 1994, 109-114.

[6] Blahota, I., *A Walsh–Vilenkin analízis néhány approximációs kérdése és alkalmazása*, Egyetemi doktori értekezés, KLTE, 1995, 1-42.

[7] Blahota, I., *A Hardy-Littlewood-like inequality on compact totally disconnected spaces*, Acta Mathematica Academaiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 14, 1998, 19-24.

[8] Blahota, I., *On the (H, L) typeness of the maximal function of Cesàro means of two-parameter integrable functions on bounded Vilenkin groups*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 54/3-4, 1999, 417-426.

[9] Blahota, I., Gát, G., *Pointwise convergence of double Vilenkin–Fejér means*, Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica, 36, 2000, 49-63.

[10] Blahota, I., *On a norm inequality with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Mathematica Hungarica, 89, 1-2, 2000, 15-27.

[11] Blahota, I., *Investigation with respect to the two-dimensional Vilenkin space*, Functions, Series, operators (L. Leindler, F. Schipp, J. Szabados, eds.), Proceedings of the Alexits Memorial Conference, Budapest, 1999, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 2002, 139-156.

[12] Blahota, I., *Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos approximációs kérdések vizsgálata*, Doktori (PhD) Értekezés, Debreceni Egyetem, Természettudományi Kar, 2002, 1-78.

[13] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of Vilenkin–Fourier series*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7/4, 2006, Article 149.

[14] Blahota, I., Gát, G., Goginava, U., *Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin–Fourier series*, Colloquium Mathematicum, 107/2, 2007, 287-296.

[15] Blahota, I., Goginava, U., *The maximal operator of the Marcinkiewicz–Fejér means of the 2-dimensional Vilenkin–Fourier series*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 45/3, 2008, 321-331.

[16] Blahota, I., Gát, G., *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Analysis in Theory and Applications, 24/1, 2008, 1-17.

[17] Blahota, I., Gát, G., *Almost everywhere convergence of Marcinkiewicz means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Studia Mathematica, 191, 2009, 215-222.

[18] Blahota, I., Goginava, U., *The martingale Hardy type inequality for the maximal operator of the (C,α) means of cubic partial sums of the d-dimensional conjugate Walsh–Fourier series*, Mathematica Pannonica, 21/1, 2010, 65-76.

[19] Blahota, I., *On the L^1 norm of the weighted maximal function of kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Mathematica Pannonica, 23/1, 2012, 1-9.

[20] Blahota, I., *On the maximal value of Dirichlet and Fejér kernels with respect to the Vilenkin-like space*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80/3-4, 2012, 503-513.

[21] Blahota, I., *Almost everywhere convergence of subsequence of logarithmic means of Fourier series on the group of 2-adic integers*, Georgian Mathematical Journal, 19/3, 2012, 417-425.

[22] Blahota, I., *On the Dirichlet kernels with respect to some special representative product systems*, benyújtva

További irodalom

[23] Fine, N. J., *On the Walsh functions*, Transactions of the American Mathematical Society, 65, 1949, 372-414.

[24] Fujii, N. J., *Cesàro summability of Walsh–Fourier series*, Proceedings of the American Mathematical Society, 77, 1979, 111-116.

[25] Gát, G., *Orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Mathematica Hungarica, 58/1-2, 1991, 193-198.

[26] Gát, G., *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arithmetica, 49/2, 1991, 105-123.

[27] Gát, G., *On the almost everywhere convergence of Fejér means of functions on the group of* 2*-adic integers*, Journal of Approximation Theory, 90/1, 1997, 88-96.

[28] Gát, G., *Pointwise convergence of the Fejér means of functions on unbounded Vilenkin groups*, Journal of Approximation Theory, 101/1, 1999, 1-36.

[29] Gát, G., *On* $(C, 1)$ *summability for Vilenkin-like systems*, Studia Mathematica, 144/2, 2001, 101-120.

[30] Gát G., *On the* L^1 *norm of the weighted maximal function of the Walsh–Kaczmarz-Dirichlet kernels*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Matematicae, 30, 2003, 55-66.

[31] Gát G., Goginava, U., *Uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Acta Mathematica Sinica (English Series), 22/2, 2006, 497-506

[32] Gát G., Goginava, U., *On the divergence of Norlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Acta Mathematica Sinica (English series), 25/6, 2009, 903-916.

[33] Gát, G., Nagy, K., *Almost everywhere convergence of a subsequence of the logarithmic means of Vilenkin–Fourier series*, Facta Universitatis – Series: Electronics and Energetics, 21/3, 2008, 275-289.

[34] Gát, G., Toledo, R., L^p*-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Mathematica, 22, 1996, 13-24.

[35] GOGINAVA, U., *Almost everywhere convergence of subsequence of logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 21/2, 2005.

[36] GOGINAVA, U., *Marcinkiewicz–Fejér means of d-dimensional Walsh–Fourier series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 307/1, 2005, 206-218.

[37] GOGINAVA, U., *The maximal operator of Marcinkiewicz–Fejér means of the d-dimensional Walsh–Fourier series*, East Journal on Approximations, 12/3, 2006, 295-302.

[38] GOGINAVA, U., *Maximal operators of (C, α)-means of cubic partial sums of d-dimensional Walsh–Fourier series*, Analysis Mathematica, 33/4, 2007, 263-286.

[39] GOGINAVA, U., *Marcinkiewicz–Fejér means of double Vilenkin–Fourier series*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 44/1, 2007, 97-115.

[40] GOGINAVA, U., TKEBUCHAVA, G., *Convergence of subsequences of partial sums and logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Acta Scientiarum Mathematica, 72, 2006, 159-177.

[41] GRÜNWALD, G., *Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 35, 1939, 343-350.

[42] HENSEL, K., *Zahlentheorie*, Berlin u. Leipzig: G. J. Geschönsche Verlagshandlung, 1913.

[43] HERRIOT, J. G., *Norlund Summability of Double Fourier Series*, Transactions of the American Mathematical Society, 52/1, 1942, 72-94.

[44] HEWITT, E., ROSS, K., *Abstract Harmonic Analysis*, I, II, Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.

[45] MARCINKIEWICZ, I., *Sur une methode remarquable de sommation des series doublefes de Fourier*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 8, 1939, 149-160.

[46] MARCINKIEWICZ, J., ZYGMUND, A., *On the summability of double Fourier series*, Fundamenta Mathematicae, 32, 1939, 122-132.

[47] Mauclaire, J., L., *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris, 1986.

[48] Mező, I., Simon, P., *Integrals of weighted maximal kernels with respect to Vilenkin systems*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 71/1-2, 2007, 57-65.

[49] Móricz, F., *Approximation by Nörlund means of Walsh–Fourier series*, Journal of Approximation Theory, 70, 1992, 375-389.

[50] Nagy, K., *On the L^1 norm of the weighted maximal function of Fejér kernels with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 9/1, 2008, 1-9.

[51] Paley, R. E. A. C., *A remarkable series of orthogonal functions*, Proceedings of the London Mathematical Society, 34, 1932, 241-279.

[52] Pál, J., Simon, P., *On a generalization of the concept of derivate*, Acta Mathematica Hungarica, 29, 1977, 155-164.

[53] Price, J., *Certain groups of orthonormal step functions*, Canadian Journal of Mathematics, 9, 1957, 413-425.

[54] Rademacher, H., *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Mathematische Annalen, 87, 1922, 112-138.

[55] Simon, P., *Investigations with respect to the Vilenkin system*, Annales Universitatis Scientarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica, 28, 1985, 87-101.

[56] Simon, P., *Cesaro summability with respect to two-parameter Walsh system*, Monatshefte für Mathematik, 131, 2000, 321-334.

[57] Schipp, F., *Certain rearrangements of series in the Walsh series*, Matematicheskie Zametki, 18, 1975, 193-201.

[58] Schipp, F., Wade, W. R., *Norm convergence and summability of Fourier series with respect to certain product systems*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Approximation Theory, Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 138, 1992, 437-452.

[59] Schipp, F., Wade W. R., *Transforms on normed fields*, Leaflets in Mathematics, Pécs, 1995, 1-175.

[60] SCHIPP, F., WADE, W. R., SIMON, P., PÁL, J., *Walsh series. An Introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.

[61] ŠNEIDER, A. A., *On series of Walsh functions with monotonic coefficients*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 12, 1948, 179-192.

[62] TOLEDO, R., *On the maximal value of Dirichlet kernels with respect to representative product systems*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 82/II, 2010, 431-447.

[63] TAIBLESON, M. H., *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1975, 1-306.

[64] VILENKIN, N. YA., *A class of complete orthonormal systems*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 11, 1947, 363-400.

[65] WALSH, J. L., *A closed set of normal orthogonal functions*, American Journal of Mathematics, 45/1, 1923, 5-24.

[66] WEISZ, F., *Martingale Hardy spaces and their Applications in Fourier analysis*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1994.

[67] WEISZ, F., *Cesàro summability of two-dimensional Walsh–Fourier series*, Transactions of the American Mathematical Society, 348, 1996, 2169-2181.

[68] WEISZ, F., *Cesàro summability of one and two-dimensional Walsh–Fourier series*, Analysis Mathematica, 22, 1996, 229-242.

[69] WEISZ, F., *Bounded operators on weak Hardy spaces and applications*, Acta Mathematica Hungarica, 80, 1998, 249-264.

[70] WEISZ, F., *The maximal (C, α, β) operator of two-paremeter Walsh–Fourier series*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 6, 2000, 389-401.

[71] WEISZ, F., *Convergence of double Walsh–Fourier series and Hardy spaces*, Approximation Theory and its Applications, 17/2, 2001, 32-44.

[72] WEISZ, F., *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy space*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.

[73] WEISZ, F., *ϑ-summability of Fourier series*, Acta Mathematica Hungarica, 103/1-2, 2004, 139-176.

[74] ZHIZHIASHVILI, L. V., *Generalizatin of a theorem of Marcinkiwicz*, Izvestiya Akademii Nauk USSR, Seriya Matematicheskaya, 32, 1968, 1112-1122.

[75] ZYGMUND, A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.